

*И. А. Семюхин*

---

# **ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ**

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов химических специальностей высших учебных заведений



*Издательство  
Московского  
университета  
1988*

УДК 533.9;541.124

Семиохин И. А. Элементарные процессы в низкотемпературной плазме: Учеб. пособие. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 142 с. — ISBN 5—211—00116—8.

В пособии излагаются основы теории взаимодействия частиц и кинетики столкновительно-излучательных процессов в низкотемпературной плазме с учетом ионизации и диссоциации молекулярных газов. Рассмотрены различные виды распределений частиц по свободным и связанным состояниям и эффективные сечения различных процессов, необходимые для расчета констант скорости элементарных процессов. Значительное внимание уделяется моделям плазмы и методам ее диагностики.

*Рецензенты:*

кафедра химии МИИТ (зав. кафедрой проф. Л. А. Николаев),  
доктор химических наук, профессор Г. П. Хомченко

С  $\frac{1805000000(4309000000)-031}{077(02)-88}$  116—88

ISBN 5—211—00116—8

© Издательство Московского  
университета, 1988 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Элементарные процессы в плазме и методы ее диагностики освещены наряду с другими вопросами в различных монографиях и обзорных статьях по физике, спектроскопии и диагностике плазмы, появившихся в последние годы в нашей стране и за рубежом в связи с развитием новой техники — техники высоких скоростей и температур, плазмохимии и лазерной химии.

В то же время приобщение химиков к исследованию различных процессов и явлений в плазме вызывает необходимость появления данной книги, в которой изложены основные понятия, основы теории взаимодействия частиц и кинетики элементарных процессов в низкотемпературной плазме.

Поскольку предлагаемая книга нацелена главным образом на анализ кинетических уравнений столкновительно-излучательных процессов в плазме, в первых шести главах довольно подробно обсуждаются необходимые для этого вопросы распределения частиц по свободным и связанным состояниям и релаксационные процессы, приводящие к установлению равновесных распределений. Большое внимание уделяется вопросам классического и квантово-механического расчета и экспериментальному определению эффективных сечений различных упругих и неупругих процессов, крайне необходимых для расчета констант скорости неравновесных элементарных процессов в плазме. При этом наряду со столкновениями электронов с тяжелыми частицами (атомами, молекулами и ионами) учтены также столкновения между различными типами тяжелых частиц и возможные в плазме процессы фотовозбуждения и фотоионизации.

В седьмой главе, посвященной в основном кинетике электронно-ионной рекомбинации, рассмотрены практически все возможные процессы, приводящие к заселению и опустошению энергетических уровней, кинетические уравнения отдельных элементарных процессов, дан общий вид фундаментального уравнения электронно-ионной рекомбинации в однородной квазистационарной плазме. Здесь же показано влияние плотности и температуры электронов на эффективные коэффициенты скорости рекомбинации и ионизации, даны кинетические уравнения процессов в неоднородной и нестационарной плазмах, детально рассмотрена кинетика ионизации молекулярного водорода в плазме импульсного разряда.

В последних двух главах книги дано представление о моделях плазмы, изложены основные спектральные методы ее диагностики.

## ПЛАЗМА. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

## § 1. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Плазмой называют квазинейтральную систему, содержащую заряженные и, возможно, нейтральные свободные частицы. Условие квазинейтральности означает, во-первых, малость суммарного заряда плазмы по сравнению с суммой зарядов одного знака; во-вторых, подразумевается электрическая нейтральность плазмы в среднем, в достаточно больших объемах или за достаточно большие промежутки времени. Величины объемов и промежутков времени, в которых проявляется квазинейтральность, определяются пространственным и временным масштабами разделения зарядов.

Рассмотрим сначала пространственный масштаб разделения зарядов. В некотором объеме плазмы с характерным размером  $l_D$ , который называется дебаевской длиной, потенциальная и кинетическая энергия заряженной частицы равны между собой:

$$\frac{ne^2 l_D^2}{\epsilon_0} = kT, \quad (1.1)$$

откуда

$$l_D = \left( \frac{\epsilon_0 kT}{ne^2} \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

где  $n$  — число зарядов в единице объема,  $e$  — заряд электрона,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая постоянная вакуума, равная  $8,85 \cdot 10^{-12}$  Кл<sup>2</sup>/Н·м<sup>2</sup>. Ясно, что вследствие ограниченности кинетической энергии частиц невозможно провести разделение зарядов в плазме на расстояниях, превышающих дебаевскую длину. На расстоянии, меньшем дебаевской длины, частицы «чувствуют» присутствие отдельных заряженных частиц, на больших расстояниях частицы объединяются в непрерывное зарядовое облако. Дебаевская длина является верхним пределом микроскопического взаимодействия между заряженными частицами.

Что же является временным параметром разделения зарядов в плазме?

Перемещение заряженных частиц в плазме приводит к появлению электростатических сил. Уравнение движения частицы с массой может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = -\frac{e}{m} E = -\frac{ne^2}{m\epsilon_0} \delta, \quad (1.3)$$

где  $\delta$  — смещение частицы;  $E$  — электростатическое поле (напряженность поля), равное

$$E = \frac{ne\delta}{\epsilon_0}. \quad (1.4)$$

Движение частицы представляет собой гармоническое колебание около положения равновесия:

$$\delta = A \sin(\omega_p t + \varphi_0),$$

где  $A$  — амплитуда,  $\varphi_0$  — начальная фаза колебания и  $\omega_p$  — угловая частота, равная

$$\omega_p = \left( \frac{ne^2}{m\epsilon_0} \right)^{1/2}. \quad (1.5)$$

Для электронов  $\omega_p = 56,458n^{1/2}$  рад/с (где  $n$  — число электронов в  $1 \text{ м}^3$ ) и называется электронной плазменной частотой. Таким образом, плазменная частота — это резонансная или характеристическая частота системы образующих плазму заряженных частиц, зависящих от их массы. Она, как и дебаевская длина, является макроскопическим параметром плазмы. Время отдельного микроскопического взаимодействия не может превысить период плазменных колебаний, т. е.  $\omega_p$  представляет собой нижний предел частоты микроскопического взаимодействия заряженных частиц.

## § 2. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим две микроскопические характеристики плазмы, отражающие дискретность заряда и массы. Дискретность заряда характеризуется числом частиц  $n_D$  в объеме дебаевской сферы:

$$n_D = \frac{4}{3} \pi l_D^3 n. \quad (1.6)$$

Приближение непрерывной среды применимо только при больших  $n_D$ , когда

$$n_D \gg 1 \quad (1.7)$$

В этом случае взаимодействие между отдельными частицами незначительно, т. е. выполнено необходимое условие применимости методов статистической механики:

Поскольку средняя потенциальная энергия частицы. (энергия взаимодействия двух частиц) равна

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} = \frac{e^2(2n)^{1/3}}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.8)$$

(где  $d = (2n)^{1/3}$  — среднее расстояние между частицами), то отношение плотности потенциальной энергии к плотности кинетической энергии

$$\frac{ne^2}{4\pi\epsilon_0} (2n)^{1/3} : \frac{3}{2} nkT = \frac{2^{1/3}}{2\pi^3 (l_D n^{1/3})^2} \approx \frac{1}{n_D^2}. \quad (1.9)$$

При  $n_D \gg 1$  это отношение мало.

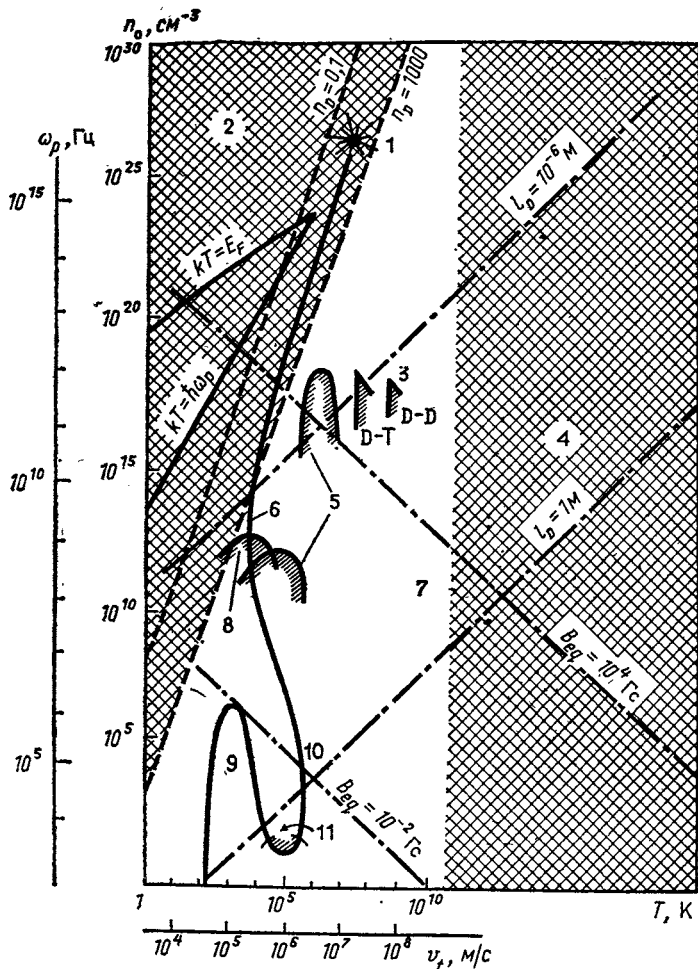


Рис. 1. Характерные значения плотности электронов и температуры плазмы в различных условиях ее существования: 1 — центр Солнца; 2 — квантовая плазма, включая металлы и полупроводники; 3 — управляемая термоядерная реакция; 4 — релятивистская плазма; 5 — лабораторный импульсный газовый разряд; 6 — видимая область Солнца; 7 — классическая кинетическая плазма (незаштрихованная область); 8 — стационарный разряд; 9 — ионосфера; 10 — корона; 11 — межпланетная плазма

Другим микроскопическим параметром плазмы является зависящая от массы частицы скорость ее теплового движения  $v_t$  в данном направлении. При заданной плотности кинетической энергии или температуре

$$\frac{nm \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} nkT, \quad (1.10)$$

средний квадрат скорости  $\langle v^2 \rangle$  равен

$$\langle v^2 \rangle \equiv 3v_i^2 = \frac{3kT}{m}. \quad (1.11)$$

Заметим, что тепловая скорость (параметр микроскопический) выражается через макроскопические характеристики — плазменную частоту  $\omega_p$  и дебаевскую длину  $l_D$  (см. 1.2 и 1.5):

$$v_i^2 = \frac{kT}{m} = \omega_p^2 l_D^2. \quad (1.12)$$

За один период плазменных колебаний частица перемещается на одну дебаевскую длину.

Электроны, обладающие максимальной подвижностью, обычно рассматриваются как важнейшая составная часть плазмы. Поэтому все приведенные выше параметры, в которых фигурируют масса, заряд и скорость теплового движения электронов, часто применяют для характеристики свойств плазмы в целом.

На рис. 1 указаны значения соответствующих параметров  $l_D$ ,  $\omega_p$  и  $v_i$  при различных температурах и концентрациях электронов. По осям отложены в логарифмическом масштабе соответственно температура (нерелятивистская скорость теплового движения) и концентрация (плазменная частота) электронов. Кривые зависимости концентрации от температуры приведены при заданном числе частиц  $n_D=0,1$  и  $n_D=1000$  в сфере дебаевского радиуса, причем указаны области, соответствующие электрическим разрядам в газах в лабораторных условиях. Обозначены области релятивистской плазмы ( $kT=mc^2$ ) и квантовой плазмы  $kT=\hbar\omega_p$  и  $kT=E_F$ , где  $E_F$  — энергия Ферми,  $c$  — скорость света.

## Глава 2

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ ПЛАЗМЫ

#### § 1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

В теории неионизованных газов ясно видно различие между результатами микроскопических столкновений и макроскопическими перемещениями частиц. Действительно, взаимодействие между частицами газа определяется значительными короткодействующими силами, проявляющимися при столкновениях. Обычно для неионизованных газов можно считать, что предшествующий акт столкновения не влияет на последующий, т. е. состояние частиц после столкновения зависит только от состояния их перед столкновением, в данный момент времени. Эта особенность является характерной чертой так называемых марковских процессов.

Вплоть до самых высоких концентраций вероятность одновременного взаимодействия трех и более частиц ничтожна. Предположение парных столкновений и «молекулярного хаоса» приводит к уравнению Больцмана, играющему важную роль в кинетической теории газов.

Развитые для решения уравнения Больцмана методы можно перенести на взаимодействие заряженных частиц с нейтральными, так как такое взаимодействие остается в основном короткодействующим.

В газовой плазме происходят столкновения электронов с нейтральными частицами, ионами и друг с другом. Даже в слабоионизованном газе со степенью ионизации 0,1% при вычислении полной проводимости необходимо учитывать не только столкновения электронов с нейтральными частицами, но и с ионами.

Электростатическое кулоновское взаимодействие между заряженными частицами имеет гораздо больший радиус действия по сравнению с силами, действующими между нейтральными частицами и между электронами и «нейтралами». Поэтому столкновения нельзя рассматривать как отдельные события, которые происходят при тесном сближении частиц. Вследствие дальнедействующего кулоновского потенциала ( $V(r) \sim r^{-1}$ ) необходимо учитывать и влияние частиц более отдаленных; можно считать, что почти все время электрон взаимодействует одновременно с большим числом электронов и ионов. Так как при таком взаимодействии число претерпеваемых электроном столкновений велико, взаимодействия между заряженными частицами становятся сглаженными и перестают быть независимыми. Поэтому на больших расстояниях влияние электрических полей можно считать макроскопическим. Взаимодействие системы из большого числа заряженных частиц в дебаевской сфере описывается не кинетическим уравнением Больцмана, а уравнением Фоккера — Планка, которое, как и уравнение Больцмана, является предельным случаем уравнения Лиувилля и может быть из него получено.

## § 2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

### 1. Поле центральных сил

В наиболее простой форме потенциальную энергию взаимодействия между атомами можно считать только функцией расстояния между двумя ядрами («поле центральных сил»). При этом можно выделить две области: область короткодействующего экспоненциального поля и область дальнедействующего поля сил поляризации. Первая из них является областью сил отталкивания, так как при достаточно малых межъядерных расстояниях преобладает кулоновское отталкивание. Поскольку дальнедействующие силы в основном являются силами притяжения, а короткодействующие — силами отталкивания, то бу-



дет существовать минимум потенциальной энергии. Мы будем рассматривать силы, измеряемые ускорением одного ядра в присутствии другого, а не силы, действующие на отдельные электроны атомов.

Вследствие значительных трудностей, возникающих как при определении потенциальных функций, так и в самой теории рассеяния, часто используют упрощенные потенциальные функции, полученные на основе различных моделей взаимодействующих частиц.

## 2. Простые потенциальные функции

Потенциальные функции для короткодействующих сил могут быть записаны в виде формулы Бора для экранированного кулоновского взаимодействия между ядрами с зарядами  $z_1$  и  $z_2$ , окруженными взаимно проникающими электронными оболочками:

$$V_B(r) = z_1 z_2 e^2 e^{-r/\beta} / r, \quad (2.1)$$

где  $\beta$  — экранирующий множитель, равный

$$\beta = a_0 / (z_1^{2/3} + z_2^{2/3}), \quad (2.2)$$

и  $a_0$  — боровский радиус, равный  $0,5 \cdot 10^{-8}$  см.

Экспериментальным данным по упругому рассеянию ионов на атомах лучше соответствует формула Фирсова

$$V_F(r) = z_1 z_2 e^2 \Phi(x) / r, \quad (2.3)$$

где  $\Phi(x)$  — функция экранирования и

$$x = \frac{(z_1^{1/2} + z_2^{1/2})^{2/3} r}{0,885 a_0}. \quad (2.4)$$

Для далекодействующих сил взаимодействия между нейтральными атомами и молекулами потенциальная энергия описывается формулой Ван-дер-Ваальса

$$V_W(r) = -C/r^6. \quad (2.5)$$

Силы Ван-дер-Ваальса возникают вследствие «динамической поляризации атомов». Постоянную  $C$  можно определить, исходя из собственных значений энергии и сил осциллятора электрического диполя.

В случае двух одинаковых атомов, один из которых находится в основном состоянии  $0$ , а другой — в возбужденном или ионизованном состоянии  $n$ , большую роль играет «резонансное», или «обменное», взаимодействие. Оно возникает в результате обмена радиационной энергией между атомами, и его величина может быть представлена в виде

$$V_{\text{обм}}(r) = -\gamma \left( \frac{e^2 \hbar^2 f_{0n}}{8\pi^2 m_e v_{0n}} \right) r^{-3}, \quad (2.6)$$

где  $f_{0n}$  — сила осциллятора;  $\nu_{0n}$  — частота перехода  $0 \rightarrow n$ . Величина  $\gamma = -2$ , если магнитный момент  $m$  состояния  $n$  равен нулю, и  $\gamma = +1$ , если  $m = \pm 1$ .

Взаимодействие иона с зарядом  $e$  и атома с поляризуемостью  $\alpha$  имеет поляризационный характер и может быть выражено в виде

$$V_p(r) = -ae^2/2r^4. \quad (2.7)$$

Взаимодействие иона с молекулой включает члены, зависящие от пространственной ориентации молекулы. Наиболее существенный из них пропорционален  $r^{-2}$  для гетерополярной молекулы и  $r^{-3}$  для гомеополярной молекулы.

В случае взаимодействия двух ионов при больших расстояниях между ними потенциальную энергию можно считать просто кулоновской:

$$V_c(r) = -z_1 z_2 e^2 / r. \quad (2.8)$$

### 3. Сложные потенциальные функции

Для описания дальнедействующих сил притяжения и короткодействующих сил отталкивания используется потенциал Леннарда-Джонса

$$V(r) = \frac{a}{r^m} - \frac{b}{r^n}. \quad (2.9)$$

Наиболее часто употребляется так называемый «потенциал 6-12», имеющий вид

$$V(r) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]. \quad (2.9a)$$

Ясно, что  $V(r) = 0$  при  $r = \sigma$ .

В последнее время делаются попытки представить полное центральное силовое поле в виде комбинации простых аналитических функций. Наиболее простой вид потенциала

$$V(r) = \frac{a}{r^m} - be^{-\alpha r}. \quad (2.10)$$

был детально изучен Линнеттом, который показал, что он лучше согласуется со спектроскопическими данными, чем обычно применяемая функция Морзе.

В последнее время чаще используют модифицированный потенциал Букингема

$$V(r) = \frac{\epsilon}{1 - 6/\alpha} \left[ \frac{6}{\alpha} \exp \left\{ \alpha \left( 1 - \frac{r}{r_e} \right) \right\} - \left( \frac{r_e}{r} \right)^6 \right], \quad (2.11)$$

где  $r_e$  — равновесное расстояние между ядрами;  $\alpha$  — параметр, не имеющий отношения к поляризуемости. Глубина по-

тенциальной ямы в минимуме  $\epsilon$  связана с колебательной энергией  $E_v$  соотношением

$$\epsilon = \frac{E_v}{4} \left( \frac{r}{r_e} \right)^6. \quad (2.12)$$

Типичная потенциальная функция для двухатомной молекулы может быть представлена формулой Морзе

$$V(r-r_e) = D[1 - \exp\{-\alpha(r-r_e)\}]^2, \quad (2.13)$$

когда за нуль принята энергия устойчивой молекулы, или

$$V(r-r_e) = \epsilon [\exp\{-2\alpha(r-r_e)\} - 2 \exp\{-\alpha(r-r_e)\}], \quad (2.14)$$

когда энергия разведенных атомов принята равной нулю.

В формулах (2.13), (2.14)  $\alpha$  равна:

$$\alpha = \left( \frac{2\pi^2 c \mu}{D h} \right)^{1/2} \omega_1. \quad (2.15)$$

Здесь  $\mu$  — приведенная масса молекулы;  $D$  — энергия диссоциации и  $\omega_e$  — частота колебаний, связанная с колебательной энергией выражением

$$E_v = h c \omega_e \left( v + \frac{1}{2} \right) - h c \omega_e x_e \left( v + \frac{1}{2} \right)^2 + \dots, \quad (2.16)$$

где  $x_e$  — коэффициент ангармоничности.

Для аппроксимации энергии взаимодействия одинаковых сферически симметричных или близких к сферически симметричным частиц с замкнутыми электронными оболочками предпочтительнее использовать потенциалы Леннард-Джонса (2.9), Букингема (2.11) или Штокмайера (для полярных молекул):

$$V(r) = 4\epsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma_1}{r} \right)^6 \right] - \frac{\mu^2}{r^3} g(\theta_1, \theta_2, \varphi_2 - \varphi_1), \quad (2.17)$$

где  $g = 2 \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ ;  $\theta_1, \theta_2, \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  — ориентационные углы,  $\mu$  — дипольный момент.

Если известны параметры потенциала пары одинаковых молекул, например  $\sigma_{ii}$  и  $\sigma_{jj}$ ,  $\epsilon_{ii}$  и  $\epsilon_{jj}$ ,  $\mu_{ii}$  и  $\mu_{jj}$ , то для взаимодействия разных молекул параметры вычисляются по полуэмпирическим комбинационным формулам

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{jj}}{2}, \quad \epsilon_{ij} = (\epsilon_{ii} \epsilon_{jj})^{1/2}, \quad \mu_{ij} = (\mu_{ii} \mu_{jj})^{1/2}, \quad (2.18)$$

где  $\mu$  — дипольный момент.

Для атомов с ненасыщенными электронными оболочками потенциалы притяжения удовлетворительно аппроксимируются функцией Морзе (2.14), а потенциалы отталкивания — функцией вида

$$V(r) = \epsilon e^{-\alpha/r}. \quad (2.19)$$

Кинетическая теория газов из частиц с несферическими потенциалами взаимодействия разработана еще недостаточно.

Известно большое число работ, посвященных квантово-механическому расчету потенциальной энергии взаимодействия частиц, однако используемые упрощения снижают точность получаемых результатов. В работах Масона и Вандерлайса для оценки хода потенциала при  $r > (1,5 + 2)r_e$  использовался полуэмпирический метод. Основу его составляет выражение для энергии взаимодействия атомов, полученное по методу валентных связей (ВС-метод):

$$E = E_a + \sum Q_{ij} + \sum_1 \mathcal{J}_{ij} - \frac{1}{2} \sum_2 \mathcal{J}_{ij} - \sum_3 \mathcal{J}_{ij}, \quad (2.20)$$

где  $E_a$  — энергия свободных атомов;  $Q_{ij}$  — энергия кулоновского взаимодействия электронов;  $\mathcal{J}_{ij}$  — обменный интеграл;  $\sum_1$  и  $\sum_3$  — суммы по всем парам электронов с антипараллельными и соответственно с параллельными спинами;  $\sum_2$  — сумма по всем электронам, не образующим пар.

Из экспериментальных методов определения потенциалов взаимодействия частиц следует отметить метод рассеяния ионных и нейтральных пучков на газовых мишенях (позволяющий измерять полное и дифференциальное сечения рассеяния), термодинамический метод (нахождение вириальных коэффициентов) и спектральные методы:

#### 4. Взаимодействие трех атомов

Энергетические соотношения в случае взаимодействия трех атомов могут быть получены на основе представления о поверхности потенциальной энергии. Такая модель имеет смысл только тогда, когда движение системы, состоящей из трех взаимодействующих частиц, соответствует движению частицы без трения по поверхности под действием силы тяжести. Энергия такой системы зависит от взаимной ориентации межъядерных осей, причем можно показать, что энергия имеет минимум, когда все три частицы расположены на одной прямой.

Для построения поверхности потенциальной энергии необходимо, чтобы кинетическая энергия системы была выражена в виде суммы двух квадратичных членов:

$$\epsilon = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dy}{dt} \right)^2, \quad (2.21)$$

где  $m$  — масса системы, а  $x$  и  $y$  — координаты на поверхности потенциальной энергии. Потенциальная энергия откладывается вдоль оси  $z$ , как в случае двухатомной молекулы.

Поверхности потенциальной энергии были рассмотрены для некоторых простых трехъядерных систем; обычно они изображаются в виде контурных кривых. Примером может служить взаимодействие атома и двухатомной молекулы, при котором

происходит сначала сближение вдоль оси  $x$  по «долине» потенциальной поверхности, затем переход через «вершину» и, наконец, удаление по «долине» вдоль оси  $y$ . Эта картина является иллюстрацией простой химической реакции или ионно-атомного обмена.

## Глава 3

### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ ПО СВОБОДНЫМ И СВЯЗАННЫМ СОСТОЯНИЯМ

#### § 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Точное описание макроскопических свойств газа связано с некоторой функцией  $f(r, v, t)$  координат  $r$ , скорости  $v$  и времени  $t$  для каждой компоненты газа. Такая функция называется функцией распределения, она показывает зависящую от времени плотность частиц  $n$  (число частиц в единице объема  $d^3r$ ), скорость которых заключена в единичном объеме пространства скоростей  $d^3v$ . Другими словами, функцию распределения можно рассматривать как плотность числа частиц в фазовом пространстве, составленном из конфигурационного пространства и пространства скоростей. Поэтому для функции распределения  $f$  можно написать уравнение непрерывности, аналогичное обычному уравнению, выражающему закон сохранения числа частиц в конфигурационном пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{df}{dt}. \quad (3.1)$$

Это уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{df}{dt} \quad (3.2)$$

получило название кинетического уравнения Больцмана.

В этом уравнении слева — дрейфовые члены, описывающие зависимость  $f$  от времени, диффузии и величины сил (поля), справа — столкновительные члены, учитывающие изменения  $f$  при всех взаимодействиях на малых расстояниях между частицами. Вследствие малого радиуса действия ( $r_e$ ) сил между нейтральными частицами (или между электронами и нейтралами) по сравнению со средним расстоянием ( $d$ ) между частицами можно пренебречь статистически маловероятными взаимодействиями, в которых участвует более двух частиц. Это соответствует модели бинарных (парных) столкновений.

## § 2. ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ

Чтобы получить гладкую функцию распределения, учитывающую взаимодействия, надо усреднить результаты отдельных парных столкновений с помощью интеграла. В связи с этим член  $df/dt$  представляет собой интеграл столкновений, а уравнение Больцмана (3.1–3.2) является интегродифференциальным.

Вывод интеграла столкновений обычно довольно громоздок. Рассмотрим для простоты однородные и изотропные газы в отсутствие внешних сил. В этом случае функция распределения не зависит от координат, а зависит лишь от абсолютной величины  $v$  скорости  $\mathbf{v}$ , т. е. является функцией квадрата скорости  $v^2$ :

$$f(\mathbf{v}) \equiv f(v^2). \quad (3.3)$$

Функция  $f(\mathbf{v})$  должна быть нормирована

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = n, \quad (3.4)$$

где  $n$  — плотность частиц данного сорта.

Рассматривая столкновения двух частиц со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , найдем обусловленное столкновениями изменение  $f(v^2)$ . Ограничимся столкновением упругих шаров одного сорта диаметром  $a$ . При условии

$$r_e \ll d \ll l_c, \quad (3.5)$$

где  $l_c$  — длина свободного пробега, ограничимся учетом только двойных столкновений.

Чтобы уменьшить число переменных, перейдем от лабораторной системы координат к системе центра масс. Запишем относительную скорость движения двух частиц:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (3.6)$$

и скорость движения центра масс:

$$\mathbf{v}_c = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.7)$$

Из соотношений (3.6) и (3.7) следует, что якобиан равен

$$\mathcal{J} = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial v_1} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial v_2} \\ \frac{\partial v_c}{\partial v_1} & \frac{\partial v_c}{\partial v_2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ \frac{m_1}{m_1 + m_2} & \frac{m_2}{m_1 + m_2} \end{array} \right| = 1, \quad (3.8)$$

откуда

$$d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 = d\mathbf{v} d\mathbf{v}_c. \quad (3.9)$$

Как показано на рис. 2, одна из частиц приближается к частице-мишени с относительной скоростью  $v$  и удаляется от нее со скоростью  $v' = v_1' - v_2'$ . Единичный вектор  $k$  задает направление соударения по линии центров (вдоль биссектрисы угла между  $v$  и  $v_1$ ). Тогда

$$\begin{aligned} v_2' &= v_2 + k(kv), & v_1' &= v_1 - k(kv) \\ & \text{и } |v| = |v'|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Вычисляя якобиан преобразований для заданных  $k$  и  $v$ , находим

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_1'}{\partial v_1} & \frac{\partial v_1'}{\partial v_2} \\ \frac{\partial v_2'}{\partial v_1} & \frac{\partial v_2'}{\partial v_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad (3.11)$$

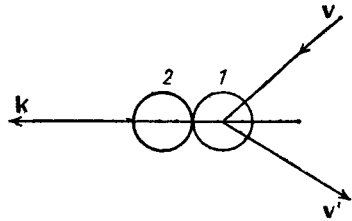


Рис. 2. Столкновение двух частиц

откуда  $dv_1 dv_2 = dv_1' dv_2'$ . (3.12)

Согласно уравнению (3.12) элементарный объем в пространстве скоростей инвариантен относительно столкновения.

Рассмотрим концентрическую с поверхностью частицы-мишени сферу радиусом  $a$  и построим цилиндр столкновений,

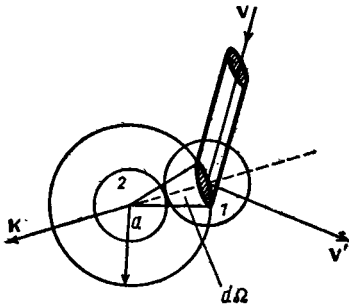


Рис. 3. Геометрия двухчастичного столкновения

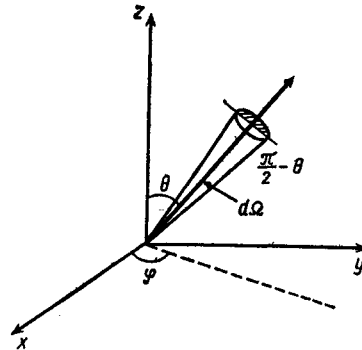


Рис. 4. Сферическая система координат

центр основания которого лежит на этой сфере и на линии центров (рис. 3). Образующая цилиндра параллельна траектории частицы 1 до столкновения. Пусть площадь основания косоугольного цилиндра равна  $a^2 d\Omega$ , где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ ,  $\theta$  — полярный и  $\varphi$  — азимутальный углы рассеяния, а длина образующей цилиндра равна  $|v|$ .

Исследуем теперь рассеяние в сферической системе координат (рис. 4). Пусть мишень находится в начале координат, а налетающая частица движется вдоль отрицательной оси  $z$ . Тогда дифференциальное сечение упругого или неупругого процесса будет определено как сечение, соответствующее рассеянию ударяющей частицы в пределах элементарного телесного угла  $d\Omega$  в виде выражения

$$\sigma_{\text{диф}} = P(\theta) \sigma d\Omega, \quad (3.13)$$

где  $P(\theta)$  — вероятность рассеяния частицы в угол  $d\Omega$ , а  $\sigma$  — эффективное сечение столкновения, равное  $\sigma = \pi a^2$ .

За единицу времени с мишенью столкнутся все частицы, скорости которых лежат в интервале  $v_1, v_1 + dv_1$ , а центры попадают в рассматриваемый цилиндр (см. рис. 3). Число таких частиц равно величине  $f(v_1) dv_1$ , умноженной на объем цилиндра  $v = v \cos \theta a^2 d\Omega$ , т. е.

$$f(v_1) dv_1 v a^2 \cos \theta d\Omega. \quad (3.14)$$

Число мишеней — центров рассеяния, т. е. число молекул, скорости которых лежат в интервале  $v_2, v_2 + dv_2$ , равно  $f(v_2) dv_2$ . Поэтому общее число столкновений молекул двух видов в единицу времени составляет

$$A = f(v_1) f(v_2) dv_1 dv_2 v a^2 \cos \theta d\Omega. \quad (3.15)$$

В силу механической обратимости в указанном элементе объема число обратных столкновений, когда частицы до соударения обладают скоростями  $v_1'$  и  $v_2'$ , а после соударения скоростями  $v_1$  и  $v_2$ , будет равно

$$B = f(v_1') f(v_2') dv_1' dv_2' v a^2 \cos \theta d\Omega. \quad (3.15a)$$

Полное изменение функции распределения, которое обозначим как  $\left(\frac{df}{dt}\right) dv_2$ , определяется разностью  $B - A$ , проинтегрированной по  $v_1$  или  $v_1'$  и по углам  $\theta$  и  $\Omega$ . С учетом уравнения (3.12) получим выражение

$$\frac{df}{dt} = \iint (f_1' f_2' - f_1 f_2) v a^2 \cos \theta dv_1 d\Omega, \quad (3.16)$$

которое называется интегралом столкновений.

Обозначая дифференциальное сечение в единицу телесного угла рассеяния через  $\sigma(v, \theta) = a^2 \cos \theta$ , запишем уравнение (3.16) в форме

$$\frac{df}{dt} = \iint (f_1' f_2' - f_1 f_2) v \sigma(v, \theta) dv_1 d\Omega. \quad (3.16a)$$

В результате получено простое выражение для интеграла столкновений при упругом рассеянии частиц.



Для упругих столкновений электронов с молекулами газа, находящимися при температуре  $T_g$ , интеграл столкновений приобретает следующий вид:

$$\frac{df}{dt} = C_0 = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial(v^2)} \left[ \frac{2m}{M-m} v_m v^3 \left( f_0 + \frac{2kT_g}{m} \frac{\partial f_0}{\partial(v^2)} \right) \right], \quad (3.17)$$

где  $v_m$  — частота столкновений при рассеянии электронов на нейтральных частицах. Эта величина равна

$$v_m = \sum_j n_j v \int (1 - \cos \theta) \sigma_j(v, \theta) d\Omega, \quad (3.17a)$$

где  $n_j$  — плотность рассеивателей сорта  $j$ .

Функция распределения в общем случае (ур. 3.1) может зависеть от пространственных координат и меняться со временем. Однако в условиях равновесия газа движение частиц между столкновениями определяется независимым от времени гамильтонианом:

$$H = \frac{p^2}{m} + V, \quad (3.18)$$

здесь  $p$  — обобщенные импульсы;  $V$  — потенциальная энергия. В этом случае функция распределения в фазовом пространстве равна

$$f(r, v) = F(H). \quad (3.19)$$

Если потенциал  $V$  не зависит от скорости, то

$$F(H) = \text{const } e^{-H/kT}, \quad (3.20)$$

и решение уравнения (3.19) будет иметь вид

$$f(r, v) = \text{const } e^{-mv^2/2kT} e^{-V(r)/kT}. \quad (3.21)$$

В отсутствие внешних сил ( $V=0$ ) получаем известную формулу распределения Максвелла—Больцмана:

$$f = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}, \quad (3.22)$$

описывающую распределение свободных нерелятивистских частиц по скоростям (или энергиям) поступательного движения.

### § 3. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ДРАЙВЕСТЕЙНА

Уравнение Больцмана применимо только к слабоионизованным газам, когда учитываются лишь взаимодействия электронов с нейтральными частицами (короткодействующие силы).

В однородной плазме в отсутствие существенно неупругих процессов уравнение Больцмана принимает вид

$$u_{\text{эф}} \frac{df}{du} + \frac{3}{2} f = 0. \quad (3.23)$$

Здесь  $u_{\text{эф}}$  — эффективная кинетическая энергия электрона, равная

$$u_{\text{эф}} = \frac{3}{2} kT_g + \frac{m}{\xi} \frac{a_{\text{эф}}^2}{v_m^2}, \quad (3.24)$$

где  $T_g$  — температура молекул газа;  $\xi$  — зависящий от скорости обобщенный параметр, учитывающий действие всех столкновений с малой передачей энергии, например при возбуждении вращательных уровней. В эффективном электрическом поле  $E_{\text{эф}}$  величина  $a_{\text{эф}}$  равна

$$a_{\text{эф}} = \frac{e}{m} E_{\text{эф}}. \quad (3.25)$$

С учетом (3.24), (3.25) уравнение (3.23) будет иметь следующее решение:

$$f = Ae^{-W}, \quad W = \int_0^v \frac{3mvdv}{2u_{\text{эф}}}, \quad (3.26)$$

где  $mvdv = du$ .

Если температура газа достаточно высока, а электрическое поле мало, то

$$u_{\text{эф}} = \frac{3}{2} kT_g, \quad (3.24a)$$

и получается классическое распределение Максвелла:

$$f = ae^{-mv^2/2kT_g}, \quad (3.26a)$$

где  $a$  — некоторая постоянная.

Рассмотрим теперь противоположный случай сильного постоянного электрического поля при низких температурах газа (постоянное магнитное и переменное электрическое поля отсутствуют). Предположим, что как параметр  $\xi$ , так и средняя длина свободного пробега:

$$l_c = v/v_m \quad (3.27)$$

не зависит от скорости. Тогда

$$u_{\text{эф}} \sim v^{-2}$$

и

$$f = be^{-cv^4}. \quad (3.28)$$

Эта функция называется функцией распределения Драйвстейна.

На рис. 5 приведены для сравнения функции распределения электронов, соответствующие распределениям Максвелла и Драйвестейна. Из рисунка видно, что функция Драйвестейна при больших скоростях убывает быстрее, чем функция Максвелла. Поэтому расчет вероятностей возбуждения и ионизации с помощью распределения Драйвестейна приводит к меньшим значениям, чем с помощью распределения Максвелла.

Введем энергетический множитель Таунсенда  $k_T$ , характеризующий отношение средней энергии электронов к энергии молекул газа:

$$k_T = \frac{m v^2 / 2}{3kT_g / 2}. \quad (3.29)$$

Оказывается, что в области упругих соударений, при  $k_T = 5 \div 100$ , распределение Драйвестейна приводит к лучшему согласию с экспериментальными данными. Необходимо иметь в виду, что это распределение было выведено при дополнительных предположениях независимости  $\xi$  и  $l_c$  от скорости. В одноатомных газах

$$\xi = \frac{2m}{M + m} = \text{const}, \quad (3.30)$$

хотя  $l_c$  может зависеть от скорости; в двухатомных газах оба этих предположения могут не выполняться. Оно справедливо при низких частотах тока (по сравнению с частотой столкновения), т. е. при  $\omega \ll \nu_m$  или низкой температуре газа. В высокочастотных электромагнитных полях или при высокой температуре газа (при постоянных  $l_c$  и  $\xi$ ) мы получим распределение Максвелла.

Для произвольной степенной зависимости  $\xi$  и  $\nu_m$  от  $v$  при существенном влиянии температуры имеем распределение Максвелла. Если приложенное поле значительно, как например в газовом разряде, содержащий электрическое поле член в уравнении (3.24) может превзойти член, зависящий от температуры газа. В этом случае показатель экспоненты  $W$  в функции распределения имеет различные выражения, зависящие от частоты приложенного переменного тока.

Неупругие столкновения меняют форму распределения  $f$ , обрезая ее при энергиях, больших  $eV_x$ , и сдвигая максимум распределения в область меньших энергий. Можно ожидать,

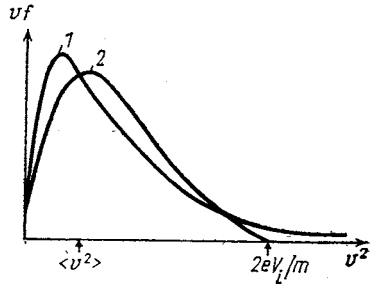


Рис. 5. Зависимость умноженной на скорость функции распределения  $v f$  от  $v^2$ : 1 — распределение Максвелла; 2 — распределение Драйвестейна. Величина  $v^2$  и число электронов (площадь под кривой) в обоих случаях одинаковы;  $eV_i$  — потенциал ионизации

что максимум этого распределения расположен ближе к максимальному значению функции Максвелла, а энергия, при которой происходит обрезание кривой, соответствует распределению Драйвестейна.

#### § 4. БОЛЬЦМАНОВСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Если умножим уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla_r f + \mathbf{h} \nabla_v f = C(f) \quad (3.31)$$

на некоторую функцию скорости  $\bar{\varphi}$  или постоянную и проинтегрируем по пространству скоростей, получим уравнение переноса

$$\frac{\partial n \bar{\varphi}}{\partial t} + \nabla_r (n \bar{\varphi} \mathbf{v}) - n \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v} \nabla_r \varphi} + \overline{\mathbf{h} \nabla_v \varphi} \right) = n \Delta \bar{\varphi}, \quad (3.32)$$

где  $\Delta \bar{\varphi}$  — средняя скорость изменения величины  $\varphi$  в единице объема в результате столкновений.

Для упругих столкновений электронов при  $\varphi=1$  из (3.32) можно получить уравнение для изменения концентрации частиц:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla (n \bar{\mathbf{v}}) = 0. \quad (3.32a)$$

Это уравнение выражает закон сохранения числа частиц или массы. При значениях  $\varphi = mv$  и  $\varphi = \frac{1}{2} mv^2$  из (3.32) получаются соответственно уравнения сохранений импульса и энергии.

#### § 5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Если в 1 см<sup>3</sup> газа при температуре  $T$  имеется  $n$  одинаковых атомов, то часть их может находиться в возбужденном состоянии. В термодинамическом равновесии доля  $n_i$  атомов, находящихся на  $i$ -м квантовом уровне с энергией  $\varepsilon_i$ , дается формулой Больцмана

$$\frac{n_i}{n} = \frac{g_i}{Q_i} e^{-\varepsilon_i/kT} \quad (3.33)$$

Сумма по состояниям  $Q_i$  определяется соотношением

$$Q_i = \sum_i g_i e^{-\varepsilon_i/kT}, \quad (3.34)$$

где  $g_i$  — статистический вес  $i$ -го уровня.

Суммирование должно проводиться по всем уровням, вплоть до самого высокого. Уровни, очень близкие к границе иониза-

ции, не реализуются, потому что квантовые орбиты энергетических состояний возмущаются окружающими частицами.

Энергия последнего уровня, который необходимо учитывать, равна

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{\text{ион}} - \Delta\varepsilon_{\text{ион}}. \quad (3.35)$$

Снижение энергии ионизации, которое необходимо знать для расчета статистических сумм и применения уравнения Саха, зависит от плотности возмущающих частиц:

$$\Delta\varepsilon_{\text{ион}, z-1} = z \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 l_D}. \quad (3.36)$$

Здесь  $l_D$  — дебаевский радиус экранирования:

$$l_D = \frac{1}{e} \left[ \frac{\varepsilon_0 kT}{n_e + \sum_{s,z} (z-1)^2 n_{s,z-1}} \right]^{1/2} \quad (3.37)$$

Для плазмы с однократно ионизованными частицами

$$\Delta\varepsilon_{\text{ион}} = 2,9 \cdot 10^{-8} \left( \frac{ne}{T_e} \right)^{1/2} \text{ эВ}, \quad (3.38)$$

где  $n_e$  выражено в  $\text{см}^{-3}$ ,  $T_e$  — в К.

Статистические веса находят по квантовому числу полного углового момента  $J_i$  с помощью известного соотношения

$$g_i = 2J_i + 1. \quad (3.39)$$

В таблицах Мур можно найти величины  $J_i$  и  $\varepsilon_i$  для всех элементов и почти всех степеней ионизации. В них энергии квантовых уровней даны в  $\text{см}^{-1}$ . Для практических приложений пользуются расчетной формулой

$$\frac{\varepsilon_i}{kT} = \frac{hc}{k} \frac{\omega_i}{T} = 1,4388 \frac{\omega_i}{T}. \quad (3.40)$$

## § 6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ ПО СТЕПЕНЯМ ИОНИЗАЦИИ В РАВНОВЕСНОЙ (ТЕРМИЧЕСКОЙ) ПЛАЗМЕ. УРАВНЕНИЕ САХА

Уравнение Больцмана (3.33) связывает плотности частиц, находящихся в различных энергетических состояниях данного атома или иона. В то же время с его помощью можно получить уравнение, связывающее плотность частиц в данной (которая будет нулевой для нейтральных частиц) степени ионизации с плотностью свободных электронов.

Чтобы показать это, запишем число свободных электронов в некотором интервале энергий:

$$\frac{dn_e}{n_{z-1}^{(i)}} = \frac{dg_e}{g_{z-1}^{(i)}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i + \varepsilon_k}{kT}\right). \quad (3.41)$$

Здесь  $dg_e$  — число состояний свободного электрона, отнесенное к некоторому интервалу энергий  $d\epsilon_k$ ;  $g_{z-1}^{(i)}$  — статистический вес уровня  $i$ ;  $\epsilon_i'$  — энергия связи электрона на этом уровне и  $\epsilon_k$  — средняя кинетическая энергия электронов в выбранном интервале энергий.

Для того чтобы вычислить  $dg_e$ , представим волновые функции свободных электронов в виде плоских волн с длиной волны  $\lambda = 2\pi\hbar/mv$  или волновым вектором  $\mathbf{k} = mv/\hbar$ . Как и для поля излучения, число состояний можно определить, рассчитав число собственных колебаний, существующих в нормировочном объеме  $L^3$ . Обычные граничные условия дают  $k_x L = 2\pi n_x$  и т. д.

Число колебаний  $dg_e'$  приближенно равно

$$2 \cdot 4\pi (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) d(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} = 4\pi \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 k^2 dk. \quad (3.42)$$

Множитель 2 возникает из-за двух ориентаций спина. Учтя, что  $\epsilon_k = (\hbar^2/2m)k^2$ , получаем

$$dg_e = 4 \left(\frac{\epsilon_k}{\pi}\right)^{1/2} L^3 \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} d\epsilon_k. \quad (3.43)$$

Объем  $L^3$  не произволен, потому что «верхнее состояние» определено, если определено положение и остальные координаты результирующего иона. Другими словами, как связанный электрон приписывается атому или иону с зарядом  $(z-1)$ , свободный электрон и ион должны быть взяты вместе как единая квантовая механическая система. Для связи  $n_e$  и  $n^{(i)}_{z-1}$  с плотностью ионов в основном состоянии  $n_z$  (1) необходимо взять следующий объем:

$$L^3 = \frac{1}{n_z(1)}. \quad (3.44)$$

Если основное состояние иона вырождено, надо учесть его статистический вес  $g_z(1)$ . С учетом этого и формул (3.43), (3.44) статистический множитель, относящийся к свободным электронам, равен

$$dg_e = 4 \frac{g_z(1)}{n_z(1)} \left(\frac{\epsilon_k}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} d\epsilon_k. \quad (3.45)$$

Подставим этот результат в уравнение (3.41), интегрируя его, получим одну из форм уравнения Саха:

$$\frac{n_e n_z(1)}{n_{z-1}(i)} = \frac{2g_z(1)}{g_{z-1}(i)} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\epsilon_i'/kT}. \quad (3.46)$$

Если использовать полные плотности  $n_{z-1}$  и  $n_z$  атомов или ионов данного химического сорта в двух последовательных ступенях ионизации, то уравнение Саха примет вид

$$\frac{n_e n_z}{n_{z-1}} = \frac{2Q_z(T)}{Q_{z-1}(T)} \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\epsilon_{\text{ион}, z-1} - \Delta\epsilon_{\text{ион}, z-1}}{kT}\right), \quad (3.47)$$

где  $\varepsilon_{\text{ион},z-1}$  — энергия  $(z-1)$  степени ионизации для изолированных систем;  $\Delta\varepsilon_{\text{ион},z-1}$  — уменьшение энергии ионизации, обусловленное взаимодействием в плазме. В дебаевской плазме

$$\Delta\varepsilon_{\text{ион},z-1} = \frac{ze^2}{8\pi\varepsilon_0 l_D}, \quad (3.48)$$

где  $l_D$  — дебаевский радиус, учитывающий экранирующее действие электронов.

### § 7. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА — ПЛАНКА

Так как при одновременном взаимодействии с большим числом электронов и ионов число претерпеваемых электроном малых отклонений велико, обычное рассмотрение интеграла столкновений в уравнении Больцмана (см. ур. 3.17) неприменимо.

Для описания таких квазинепрерывных взаимодействий можно использовать другую форму интеграла столкновений, которая имеет большое значение в небесной механике и теории броуновского движения. Такая форма приводит к уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\delta f}{\delta t} = - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial v_{\mu}} f(\Delta v_{\mu})_{\text{ср}} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2}{\partial v_{\mu} \partial v_{\nu}} f(\Delta v_{\mu, \nu})_{\text{ср}}. \quad (3.49)$$

Оно описывает изменение функции распределения в результате почти непрерывных, накладывающихся друг на друга, слабых соударений электронов, диффундирующих в пространстве скоростей.

В основу вывода уравнения Фоккера—Планка легли следующие предпосылки.

1. Предполагается марковский характер процесса рассеяния, когда развитие системы в будущем зависит только от состояния системы в данный момент времени и не зависит от ее состояния в предыдущие моменты времени.

2. Столкновения считаются упругими.

3. Результирующее микроскопическое поле, в котором происходит рассеяние, образуется суперпозицией полей каждой из частиц, заключенных в сфере дебаевского радиуса  $l_D$ .

Фигурирующие в уравнении (3.49) средние значения  $(\Delta v_{\mu})_{\text{ср}}$ ,  $(\Delta v_{\mu, \nu})_{\text{ср}}$  называют коэффициентом динамического трения и тензором обобщенных коэффициентов диффузии. Вектор с составляющими  $m(\Delta v_{\mu})_{\text{ср}}$  представляет собой силу трения, направленную противоположно скорости электронов. Тензор с компонентами  $(\Delta v_{\mu, \nu})_{\text{ср}}$  описывает случайные флуктуации скорости относительно среднего значения и препятствует выравниванию энергии всех электронов. Под действием диффузии в пространстве скоростей и динамического трения симметричная часть функции распределения по скоростям в отсутствие внешних сил стремится к равновесному максвелловскому распределению.

## РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В ГАЗАХ

## § 1. ВРЕМЯ РЕЛАКСАЦИИ. ПРОСТЕЙШЕЕ РЕЛАКСАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

При отклонении некоторой величины  $q$  от равновесного значения возникают факторы, стремящиеся вернуть ее к равновесному значению. Так, в результате явлений переноса происходит выравнивание температур и концентраций. Скорость приближения величины  $q$  к равновесному значению,  $q_0$ , пропорциональна ее отклонению от равновесного значения:

$$-\frac{dq}{dt} = k_I (q - q_0), \quad (4.1)$$

где  $k_I$  — коэффициент пропорциональности. Обратная величина коэффициента пропорциональности

$$\tau = 1/k_I \quad (4.1a)$$

есть время достижения величиной  $q$  равновесного значения. Решение уравнения (4.1) имеет вид

$$q - q_0 = (q - q_0)_{t=0} e^{-k_I t} = (q - q_0)_{t=0} e^{-t/\tau}, \quad (4.2)$$

где  $(q - q_0)_{t=0}$  — отклонение от равновесного значения в начальный момент времени. В соответствии с уравнением (4.2), дающим экспоненциальную зависимость,  $\tau$  имеет смысл времени релаксации.

Часто бывает, что  $q=0$  при  $t=0$ , тогда из (4.1) и (4.1a) получается выражение вида

$$\tau = 1/k_I = \frac{q_0}{\left(\frac{dq}{dt}\right)_{q(t=0)=0}} \quad (4.3)$$

которое является простейшим выражением для времени релаксации. В состоянии, далеко от равновесного, это выражение не всегда справедливо, однако оценка порядка величины времени релаксации с помощью уравнения (4.3) возможна и в этом случае (в разных процессах переноса).

В применении к процессам переноса (обмена) энергии уравнение (4.3) можно записать следующим образом:

$$\tau = \frac{E_0}{\left(\frac{dE}{dt}\right)_{E(t=0)=0}}. \quad (4.3a)$$



## § 2. ПОСТУПАТЕЛЬНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ

### 1. Время установления максвелловского распределения

Наиболее быстрым процессом, связанным со столкновениями, является обмен энергией между поступательными степенями свободы. Пусть вначале неподвижный одноатомный газ А составляет небольшую примесь в газе, имеющем температуру  $T$ . Вследствие столкновений с молекулами В газ А переходит из некоторого начального состояния в состояние с температурой  $T$ . При этом в равновесии энергия газа становится равной

$$E_0 = \frac{3}{2} kT n_A, \quad (4.4)$$

где  $n_A$  — плотность молекул в  $1 \text{ см}^3$ .

Для вычисления  $dE/dt$  используем модель твердых упругих шаров (непроницаемых сфер) диаметром  $d_A$  для молекул А и  $d_B$  — для молекул В. Примем, что все столкновения происходят вдоль линии центров, тогда

$$\frac{dE}{dt} \Big|_{E=0} = n_A \int \Delta \varepsilon z^{(0)}(v) dv. \quad (4.5)$$

Здесь  $z^{(0)}(v) dv$  — частота столкновений молекулы А (массы  $m_A$ ) с молекулами В (массы  $m_B$ ), имеющими скорости в интервале от  $v$  до  $v+dv$ ;  $\Delta \varepsilon$  — энергия, передаваемая неподвижной молекуле А при одном столкновении с молекулой В. Из теории упругих столкновений следует

$$\frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{4m_A m_B}{(m_A + m_B)^2}, \quad \varepsilon = \frac{m_B v^2}{2}. \quad (4.6)$$

Поскольку считается, что молекулы В имеют максвелловское распределение по скоростям, то

$$z^{(0)}(v) dv = n_B d^2 \left( \frac{2\pi kT}{m_B} \right)^{1/2} \left( \frac{m_B}{kT} \right)^2 e^{-(m_B v^2)/kT} v^3 dv. \quad (4.7)$$

Подставляя (4.6) и (4.7) в формулу (4.5), находим

$$\frac{dE}{dt} \Big|_{E=0} = \frac{4m_A m_B^2}{(m_A + m_B)} z 2kT, \quad (4.8)$$

где  $z$  — полное число столкновений молекулы А с молекулами В в единицу времени в единице объема.

Если теперь в уравнение (4.2) подставить значения  $E_0$  (ур. 4.4) и  $dE/dt$  (ур. 4.8), то получим выражение для времени установления максвелловского распределения

$$\tau_n = \frac{3}{4} \frac{(m_A + m_B)^2}{4m_A m_B} \frac{1}{z}. \quad (4.9)$$

При  $m_A = m_B$  формула принимает простой вид:

$$\tau_n \sim \frac{1}{z} = \tau_0, \quad (4.10)$$

где  $\tau_0$  — среднее время свободного пробега.

Таким образом, установление равновесия по поступательным степеням свободы в газе А происходит за время между двумя столкновениями.

При  $m_A \gg m_B$  время релаксации

$$\tau_n \sim \frac{m_A}{m_B} \tau_0 > \tau_0, \quad (4.11)$$

т. е. обмен поступательной энергией между легкой и тяжелой компонентами затруднителен.

## 2. Релаксация электронов и ионов

При изотропном распределении средняя частота столкновений  $\langle v_{aa} \rangle$  между произвольными одинаковыми частицами сорта  $a$  определяется формулой, подобной уравнению (4.18):

$$\langle v_{aa} \rangle = \frac{4(2\pi)^{1/2}}{3} n_a \left( \frac{z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 k T_a} \right)^2 \left( \frac{kT}{m} \right)^{1/2} \ln \Lambda, \quad (4.12)$$

где  $\ln \Lambda$  — кулоновский логарифм, равный

$$\ln \Lambda = \ln(L_D / b_0); \quad (4.12a)$$

$b_0$  — прицельное расстояние, соответствующее рассеянию частицы на  $90^\circ$ . Нормированное время релаксации равно по порядку величине

$$\langle \tau_{aa} \rangle \sim [\langle v_{aa} \rangle]^{-1} \sim \frac{(m T_a^3)^{1/2}}{z^4 n_a}. \quad (4.13)$$

Сравним между собой времена релаксации электронного газа  $\langle \tau_{ee} \rangle$  и ионного газа  $\langle \tau_{ii} \rangle$ . Если  $m$  и  $M$  — массы электрона и иона,  $n$  и  $n_+$  — их концентрации, а  $T$  и  $T_+$  — температуры, то

$$\frac{\langle \tau_{ii} \rangle}{\langle \tau_{ee} \rangle} = \frac{\langle v_{ee} \rangle}{\langle v_{ii} \rangle} \approx \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{T_+}{T} \right)^{3/2} \left( \frac{z^4 n_+}{n} \right) = \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{T_+}{T} \right)^{3/2} z^3, \quad (4.14)$$

где  $z n_+ = n$ . Видно, что ионы приближаются медленнее к максвелловскому распределению, чем электроны. Состояние равновесия для электронной компоненты достигается гораздо быстрее вследствие их малой массы, если только температура электронов не очень высокая, т. е. если

$$\frac{T}{T_+} < \left( \frac{M}{m} \right)^{1/3} z^2. \quad (4.14a)$$

### 3. Установление равнораспределения энергии между электронами и ионами

При максвелловском распределении ионов и электронов по скоростям со своими  $T_+$  и  $T$  уравнение переноса энергии имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{8n_+Y_{ei}}{3\sqrt{\pi}} \frac{m}{M} \frac{T - T_+}{\{(2kT_+/M) + (2kT/m)\}^{3/2}}, \quad (4.15)$$

где

$$Y_{ei} = 4\pi \left( \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \right)^2 \ln\Lambda. \quad (4.15a)$$

Поскольку

$$n \frac{\partial T}{\partial t} = -n_+ \frac{\partial T_+}{\partial t}, \quad (4.16)$$

то в процессе релаксации величина  $(nT + n_+T_+)$  не меняется. Если обозначить равновесную температуру через  $T_{eq}$ , то

$$T_{eq} = \frac{nT + n_+T_+}{n + n_+}. \quad (4.17)$$

Величину скорости релаксации температур электронов и ионов можно получить из уравнений (4.15) и (4.16). Частота столкновений электронов с ионами и время релаксации для распределения энергии между электронами и ионами равны соответственно

$$\langle \nu_{ei} \rangle = \frac{4\pi(2\pi)^{1/2}}{3} n_+ \left( \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 kT} \right)^2 \left( \frac{kT}{m} \right)^{1/2} \ln\Lambda, \quad (4.18)$$

$$\langle \tau_{ei} \rangle = \frac{n_+}{n + n_+} \left( \frac{M}{2m} \right) \langle \nu_{ei} \rangle^{-1}, \quad (4.19)$$

где

$$\langle \nu_{ei} \rangle = n_+ Y_{ei} / v^3. \quad (4.19a)$$

Сравним время  $\langle \tau_{ei} \rangle$  с характерными временами изотропного или максвелловского распределения, равными по порядку величины  $\langle \nu_{aa} \rangle^{-1}$ . Из уравнений (4.13) и (4.14) имеем

$$\frac{\langle \tau_{ei} \rangle}{\langle \tau_{ee} \rangle} \approx \left( \frac{n}{n + n_+} \right) \frac{M}{2m} \frac{1}{z^2}, \quad (4.20)$$

т. е.

$$\langle \tau_{ei} \rangle / \langle \tau_{ee} \rangle \sim M/m. \quad (4.20a)$$

Используя уравнения (4.13) и (4.19), находим

$$\frac{\langle \tau_{ei} \rangle}{\langle \tau_{ii} \rangle} \approx \left( \frac{n_+}{n + n_+} \right) \left( \frac{z^2}{2} \right) \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{T}{T_+} \right)^{3/2}. \quad (4.21)$$

Таким образом, равнораспределение между электронами и ионами устанавливается гораздо медленнее (примерно в

$M/m$  раз), чем равновесие между электронами. Однако релаксация между ионами в любой момент времени протекает быстрее, чем процесс равномерного распределения энергии между электронами и ионами, т. е. выполняется условие  $\langle \tau_{ei} \rangle > \langle \tau_{ii} \rangle$ , если

$$\left(\frac{T_+}{T}\right)^{3/2} \ll \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \frac{z^2 n_+}{2(n+n_+)} \quad (4.22)$$

При выполнении этого условия установление равнораспределения энергии между электронами и ионами осуществляется уже после установления равновесных распределений для каждой компоненты: Только в этом случае распределения электронов и ионов на протяжении всего процесса приближения системы к равновесию можно считать максвелловскими.

### § 3. ВРЕМЯ УСТАНОВЛЕНИЯ РАВНОВЕСНЫХ ДИССОЦИАЦИИ И ИОНИЗАЦИИ

Наиболее медленные процессы установления равновесия связаны с диссоциацией, ионизацией и электронным возбуждением. Начальная стадия диссоциации в системе, где распадающиеся молекулы составляют небольшую примесь, описывается кинетическим уравнением

$$\frac{dn}{dt} = -k_{\text{дис}} n N, \quad (4.23)$$

где  $n$  — плотность диссоциирующих частиц;  $N$  — плотность молекул нейтрального газа. Время установления равновесной диссоциации  $\tau_{\text{дис}}$  по порядку величины равно

$$\tau_{\text{дис}} \sim (k_{\text{дис}} N)^{-1}. \quad (4.24)$$

Конкретный расчет  $k_{\text{дис}}$  требует знания механизма диссоциации. Однако в обычных условиях термическая диссоциация происходит при столкновении молекул, энергия которых (внутренняя плюс кинетическая) превышает энергию диссоциации. Если процесс диссоциации не нарушает равновесия в системе, то

$$k_{\text{дис}} = P z^0 e^{-D/kT}, \quad (4.25)$$

где  $P$  — стерический фактор;  $z^0$  — число столкновений диссоциирующей молекулы в 1 с при  $N=1$ . Объединяя выражения (4.24) и (4.25), получим

$$\tau_{\text{дис}} \sim \frac{e^{D/kT}}{P z}, \quad (4.26)$$

где  $z = z^0 N$ .

Процесс ионизации одноатомного газа в плазме происходит в основном за счет электрон-атомных столкновений;



Кинетическое уравнение, описывающее начальную стадию ионизации, где можно пренебречь рекомбинацией, имеет вид, аналогичный (4.23):

$$\frac{dn_e}{dt} = k_{\text{ион}} n_e N. \quad (4.28)$$

По аналогии с соотношениями (4.24) и (4.25) можно записать

$$\tau_{\text{ион}} \sim (k_{\text{ион}} N)^{-1}, \quad (4.29)$$

$$k_{\text{ион}} = Pz e^{-\varepsilon_{\text{ион}}/kT_e}. \quad (4.30)$$

При этом принимаем, что электронный газ имеет максвелловское распределение с температурой  $T_e$ , которая, вообще говоря, может отличаться от температуры газа  $T$ . Тогда время установления равновесной ионизации будет равно

$$\tau_{\text{ион}} = \frac{e^{\varepsilon_{\text{ион}}/kT}}{Pz}, \quad (4.31)$$

где  $\varepsilon_{\text{ион}}$  — энергия ионизации,  $z = z^0 N$ .

Поскольку энергия возбуждения и энергия диссоциации одного порядка с энергией ионизации, эти процессы могут идти параллельно, поэтому

$$\tau_{\text{возб}} = \frac{e^{\varepsilon_{\text{возб}}/kT_e}}{Pz} \ll \tau_{\text{ион}}. \quad (4.32)$$

При высоких температурах (10000—20000 К) наиболее медленным процессом является установление ионизационного равновесия.

Проведенное рассмотрение позволяет установить последовательность (иерархию) релаксационных процессов в плазме:

$$\tau_n \ll \tau_{\text{дис}} < \tau_{\text{возб}} < \tau_{\text{ион}}. \quad (4.33)$$

## Глава 5

### ЭФФЕКТИВНЫЕ СЕЧЕНИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ

#### § 1. УПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С ТЯЖЕЛЫМИ ЧАСТИЦАМИ

##### 1. Полное сечение столкновений

Средняя длина свободного пробега между столкновениями электронов в некотором молекулярном газе в представлении упругих шаров равна

$$l_1 = \frac{1}{n_m \pi r_{12}^2}, \quad (5.1)$$

где  $n_m$  — число молекул в единице объема. Поскольку  $r_1 \ll r_2$ , то  $r_{12} \sim r_2$ , и выражение (5.1) принимает вид для электронов

$$l_1 = \frac{1}{n_m \pi r_2^2}. \quad (5.1a)$$

Число столкновений, претерпеваемых электроном на единицу длины, равно

$$z = \frac{1}{l_1} = n_m \pi r_2^2 = n_m \sigma_m, \quad (5.2)$$

где  $\sigma_m = \pi r_2^2$  определяется как площадь поперечного сечения молекулы.

Атом не имеет резко обозначенной внешней границы, поэтому модель упругих сфер неверна, и столкновения можно рассматривать как происходящий при сближении двух частиц процесс изменения физического состояния самих частиц или их импульсов. Полезно ввести понятие полного сечения столкновений  $\sigma$ : столкновение происходит каждый раз, когда электрон пересекает эту «эффективную площадь» атома  $\sigma$ .

Связанная с полным сечением частота столкновений определяется с помощью средней длины свободного пробега:

$$\nu_0 = \nu / l_1 = n_m \nu \sigma, \quad (5.3)$$

где  $\nu$  — скорость электронов.

## 2. Дифференциальное сечение рассеяния

Определенное выше значение  $\sigma$  представляет собой проинтегрированную по пространственным углам величину. В то же время рассеянные электроны обладают некоторым распределением по углам. При упругих столкновениях рассеяние не сопровождается заметной потерей энергии; при неупругих взаимодействиях потери энергии велики. Энергетический спектр может дать зависимость от угла рассеяния дифференциального сечения  $\sigma_\partial(\theta)$  для процессов упругого рассеяния, возбуждения, ионизации и т. д.

Определим дифференциальное сечение рассеяния при упругих столкновениях. Рассмотрим проходящий через газ поток электронов. Пусть  $n_m \sigma_\partial(\Omega)$  — доля электронов, рассеиваемых на единице пути в данном направлении (определяемом полярным углом  $\theta$  и азимутальным углом  $\varphi$ ) в единицу телесного угла  $\Omega$ . Величины  $\sigma_\partial(\Omega)$  и  $\sigma$  связаны соотношением

$$\sigma(\nu) = \int \sigma_\partial(\nu, \Omega) d\Omega = \int \sigma_\partial(\nu, \Omega) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (5.4)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла. Если  $\sigma_\partial$  не зависит от  $\varphi$ , то

$$\sigma(\nu) = 2\pi \int_0^\pi \sigma_\partial(\nu, \theta) \sin \theta d\theta. \quad (5.5)$$

### 3. Рассеяние в системе центра масс.

До сих пор мы рассматривали все величины в лабораторной системе отсчета. Более удобной при изучении рассеяния является система центра масс. Например, измеряемый в опыте угол рассеяния  $\theta$  есть угол между векторами конечной и начальной скоростей рассеиваемой частицы. С другой стороны, в системе центра масс угол рассеяния  $\theta_c$ , который вычисляется в эквивалентной задаче одного тела, представляет собой угол между конечным и начальным направлениями вектора относительной скорости двух частиц. Если массой налетающей частицы можно пренебречь по сравнению с массой рассеивателя, то углы совпадают.

В случае упругого столкновения при нулевой скорости рассеивателя соотношение между  $\theta$  и  $\theta_c$  можно получить из уравнения

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\sin \theta_c}{\left(\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta_c\right)}, \quad (5.6)$$

а соотношение между дифференциальными сечениями рассеяния можно представить в виде

$$\sigma_\theta(\theta) = \sigma_\theta(\theta_c) \frac{d \cos \theta_c}{d \cos \theta}. \quad (5.7)$$

Для электронов  $\theta \approx \theta_c$  и  $\sigma_\theta(\theta) \approx \sigma_\theta(\theta_c)$ .

### § 2. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ

Представим силовое поле атома в виде сферически симметричного поля. Тогда электрон будет рассеиваться на потенциале  $V(r)$ , обратно пропорциональном некоторой степени расстояния между электроном и центром атома:

$$V(r) = Ar^{-n}, \quad (5.8)$$

где  $A$  — постоянная. Для полностью ионизованного атома поле — кулоновское ( $n=1$ ), в случае же нейтральных атомов кулоновская сила между ядром и электроном частично экранируется атомными электронами. В результате с увеличением расстояния от атома поле уменьшается быстрее, чем чисто кулоновское поле. Полная потенциальная энергия может быть представлена в виде суммы функций, подобных (5.8).

При центральном взаимодействии электрона с тяжелой частицей момент количества движения электронов и полная энергия не меняются и равны начальным значениям. Для сферичес-

кого симметричного потенциала это приводит к следующей зависимости дифференциального сечения от вида потенциала  $n$ :

$$\sigma_{\theta}(\theta_c) \sim (v')^{-4/n}, \quad (5.9)$$

где  $v'$  — скорость налетающего электрона.

Уравнение (5.9) дает в рамках классической механики ответ на вопрос, какая зависимость силы от расстояния соответствует, например, предположению о постоянстве частоты столкновения при передаче импульса  $v_m$ . Из определения  $v_m$  следует

$$v_m = \int n_m \sigma_{\theta}(v, \Omega) v (1 - \cos \theta) d\Omega. \quad (5.10)$$

При  $v_m = \text{const}$   $\sigma_{\theta}(\theta_c) \sim 1/v$ , поэтому, согласно уравнению (5.9),  $n=4$ . Потенциал  $V = Ar^{-4}$  описывает взаимодействие между зарядом электрона и дипольным моментом, индуцируемым электроном в нейтральном поляризуемом атоме. В кулоновском поле  $V(r) = -\frac{k}{r}$  потенциальная энергия взаимодействия электрона с ионом  $ze$  равна

$$V(r) = \frac{ze^2}{r}. \quad (5.11)$$

Дифференциальное сечение рассеяния в этом случае может быть выражено известной формулой Резерфорда

$$\sigma_{\theta}(\theta)_c = \left( \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0\mu v^2} \right)^2 \frac{1}{4 \sin^4\left(\frac{\theta_c}{2}\right)} = \frac{b_0}{4 \sin^4\left(\frac{\theta_c}{2}\right)}, \quad (5.12)$$

где  $\mu = \frac{mM}{m+M}$  — приведенная масса;  $b_0$  — прицельное расстояние, при котором происходит отклонение электрона на  $90^\circ$ . Формула Резерфорда приводит к бесконечному значению полного сечения рассеяния; в физике плазмы вместо нее применяют формулу для рассеяния в экранированном кулоновском поле.

Используя зависимость сечения рассеяния от скорости налетающего электрона на различных молекулах, можно определить характер сил взаимодействия электрона с молекулами. Так, для полярных молекул, обладающих собственным диполем ( $\text{H}_2\text{O}$ ),  $\sigma_{\theta} \sim v^{-2}$ ,  $n=2$ ,  $V \sim r^{-2}$ .

### § 3. КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

В квантовой механике движение частиц описывается волновой функцией  $\psi$ . Квадрат амплитуды волны  $|\psi|^2$  в некоторой точке дает вероятность нахождения частицы в этой точке. Длина волны такой вероятности, описывающей движение любой частицы, равна

$$\lambda = h/mv, \quad (5.13)$$



поскольку для всех материальных систем сохраняется соотношение между импульсом частицы  $mv$  и волновым числом  $k$  для волны, связанной с частицей:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi mv}{h}. \quad (5.12a)$$

Если  $E$  — энергия налетающих электронов, то волновое уравнение Шредингера для электронов в отсутствие силового поля будет иметь вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \psi = 0. \quad (5.14)$$

Решением такого уравнения для линейного движения является плоская монохроматическая волна единичной амплитуды, распространяющаяся в положительном направлении  $z$ :

$$\psi_0 = e^{ik_q z}, \quad (5.15)$$

где

$$k_q = \frac{2\pi}{\lambda'} = \left( \frac{8\pi^2 m E}{h^2} \right)^{1/2}. \quad (5.15a)$$

В качестве простейшей задачи рассмотрим рассеяние в поле центральных сил  $V(r)$ , где потенциал  $V$  будет представлять собой сумму всех существенных потенциалов, перечисленных в предыдущем параграфе. Другими словами,  $V$  будет представлять потенциальную энергию в поле атома. Тогда при столкновении потока электронов (плоской волны) с атомами энергия электронов изменится до  $(U-V)$  и уравнение Шредингера примет вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m'}{h^2} (U-V) \psi = 0. \quad (5.16)$$

Чтобы решить это уравнение, можно разложить волновую функцию в ряд по полиномам Лежандра:

$$\psi = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l P_l(\cos \theta), \quad (5.17)$$

где

$$P_l^m(\cos \theta) = \frac{(2l)! \sin^m \theta}{2^l l! (l-m)!} \left[ \cos^{2-m} \theta - \frac{(l-m)(l-m-1)}{2(2l-1)} \cos^{l-m-2} \theta + \dots \right]. \quad (5.18)$$

(При  $l=0$  получается  $s$ -состояние атома, при  $l=1$  —  $p$ -состояние.)

В ряде задач существенную роль играет только  $s$ -волна ( $l=0$ ), но для большей точности необходимо также учитывать более высокие значения  $l$ .

Решение уравнения (5.16) можно представить в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad (5.16a)$$

где  $\psi_0$  характеризует падающую  $s$ -волну, а  $\psi_1$  — рассеянную волну:

$$\psi_1 = \frac{e^{jk_q r}}{r} f(\theta_c), \quad (5.16b)$$

где  $f(\theta_c)$  — амплитуда рассеяния.

Дифференциальное сечение рассеяния определяется как

$$\sigma_\partial(\theta_c) = r^2 |\psi|^2, \quad (5.19)$$

где  $r$  — расстояние от атома до точки наблюдения, расположенной вдали от области, в которой происходит рассеяние.

### 1. Борновское приближение

Существует несколько методов решения уравнения (5.16). Один из них основан на борновском приближении  $E \gg V$  и приводит к следующему выражению для дифференциального сечения:

$$\sigma_\partial(\theta_c) = \left( \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \right)^2 \left| \int_0^\infty \left[ \frac{\sin(K_q r')}{K_q} \right] V(r') r' dr' \right|^2, \quad (5.20)$$

где

$$K_q = 2k_q \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right) = \frac{4\pi}{h} (2mE)^{1/2} \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right). \quad (5.20a)$$

Формула Борна не применима для электронов низких энергий ( $E < 100$  эВ). Действительно, проведенные по уравнению (5.20) расчеты дают монотонное уменьшение сечения рассеяния с возрастанием скорости электронов. В то же время экспериментально наблюдается эффект Рамзауэра—Таунсенда, когда кривые рассеяния в аргоне, криптоне при низких энергиях имеют максимумы и минимумы (рис. 6). Так как энергия электронов низкотемпературной плазмы не превышает 10 эВ, необходима более точная теория.

### 2. Разложение по сферическим гармоникам

Другой возможный подход использует разложение по сферическим гармоникам, сходящееся для медленных электронов. Для атомов можно считать потенциал сферически симметричным, тогда

$$\sigma_\partial(\theta_c) = k_q^{-2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta_c) \right|^2, \quad (5.21)$$

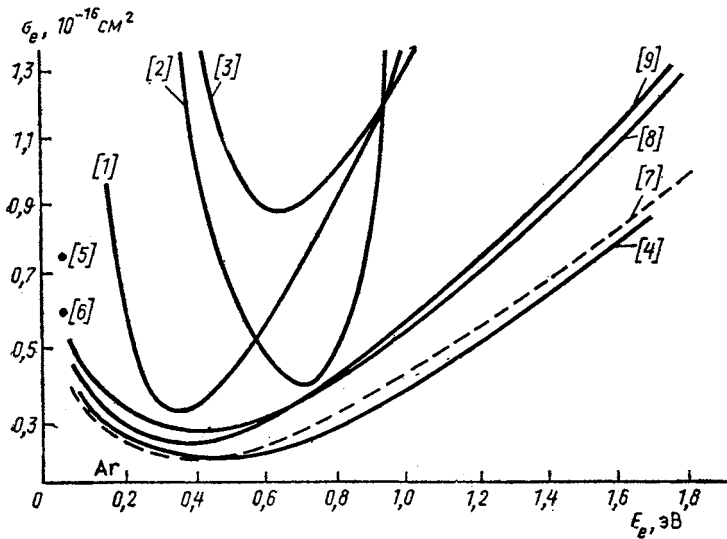


Рис. 6. Сечения рассеяния электронов на атомах аргона в зависимости от энергии электронов по данным различных авторов: 1. Ramsauer C.//Ann. Phys. 1921. Bd 64. S. 513. 2. Rush E.//Phys. Zeitschr. 1925. Bd 26. S. 748. 3. Norman C.//Phys. Rev. 1930. Vol. 35. P. 1217. 4. Lin S. et al.//J. Appl. Phys. 1955. Vol. 26. P. 95; 1957. Vol. 28. P. 754. 5. Wahlin H.//Phys. Rev. 1931. Vol. 37. P. 260. 6. Phelps A. et al.//Phys. Rev. 1951. Vol. 84. P. 559. 7—9. Townsend J., Bailey V.//Phil. Mag. 1922. Vol. 44. P. 1033.

где  $\delta_l$  — сдвиг фазы парциальной волны, определяемой из граничных условий.

Вследствие ортогональности полиномов Лежандра полное сечение рассеяния не содержит произведений с разными индексами множителей и определяется следующей формулой:

$$\sigma_e = 2\pi \int \sigma_\partial(\theta_c) \sin \theta_c d\theta_c = \frac{4\pi}{k_q^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (5.22)$$

Зависимость  $\sigma_e$  от электронной энергии приводит к дифракционной картине рассеяния с максимумами и минимумами. В частном случае  $\delta_l = 180^\circ$  сечение рассеяния  $\sigma_e$  обращается в нуль (полное поглощение).

В области низких энергий (до 0,5 эВ) вклад от  $l \geq 1$  незначителен, т. е.

$$\sigma_e = \frac{2\pi}{k_q^2} \sin^2 \delta_l. \quad (5.22a)$$

Как можно видеть из уравнения (5.22а), решение задачи о рассеянии в основном сводится к определению фазовых сдвигов  $\delta_l$ . При малых фазовых сдвигах применяется приближение Борна, при больших — приближение Джеффриса. Для расчетов эффективных сечений неупругих процессов, в частности процессов перезарядки, используют метод прицельных расстояний или метод возмущенных стационарных состояний. В проблемах связанных состояний велико значение вариационных методов, развитых Хюльтенем и Таммом.

### 3. Рассеяние электронов на молекулах

При рассмотрении рассеяния электронов на молекулах используется разложение волновой функции как функции  $r$  и угла  $\theta$  (а не одного расстояния  $r$ ). Кроме того, предполагается, что молекула обладает полуэмпирическим эффективным потенциалом и эффективным зарядом. Вычисленное Фиском при таком разложении полное сечение рассеяния равно

$$\begin{aligned}\sigma_e &= \frac{8\pi}{k^2 q} \sum_{l,m} \sin^2 \delta_{l,m} \quad \text{для } m \neq 0, \\ \sigma_e &= \frac{4\pi}{k^2 q} \sum_l \sin^2 \delta_l \quad \text{для } m = 0,\end{aligned}\tag{5.23}$$

где  $\delta_{l,m}$  — сдвиги фаз для волны  $(l, m)$  при рассеянии электроном молекулой.

Очевидно, решения, отвечающие правильному трехмерному потенциалу, действующему на электрон в поле молекулы, получить очень трудно. Дополнительные трудности связаны с квазиупругими столкновениями, в результате которых происходит возбуждение вращательных или колебательных уровней. По этой причине теоретические расчеты проводят в основном для атомов, и только для молекулы водорода Фиском были выполнены полуэмпирические расчеты. Обычно для атомов используют теоретические оценки (экспериментальное определение сечений рассеяния затруднительно); большая часть данных для молекулы получена экспериментальным путем.

## § 4. НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С ТЯЖЕЛЫМИ ЧАСТИЦАМИ

### 1. Ионизация атомов и молекул. Классическая теория

Томсон (1912) впервые изучил ионизацию атомов заряженными частицами, рассматривая ее как процесс передачи энергии между налетающим электроном  $e$  с энергией  $E$  и атомным электроном. Атомный электрон предполагался неподвижным и свободным.

Чтобы получить выражение для сечения ионизации и зависимости его от энергии налетающего электрона, рассмотрим сначала классическую задачу рассеяния сталкивающихся частиц в классическом представлении. В системе центра масс эта задача сводится к исследованию движения частицы с массой, равной приведенной массе сталкивающихся частиц. Потенциал взаимодействия этой частицы с силовым центром равен потенциалу взаимодействия между частицами. На рис. 7 представлены параметры столкновения при упругом рассеянии частиц. При сферически симметричном потенциале  $V=A/r^n$  угол рассеяния  $\theta$  определяется прицельным параметром столкновения частиц  $b$ . Рассеяние частиц в элемент угла от  $\theta$  до  $\theta+d\theta$  однозначно связано с интервалом изменения параметра от  $b$  до  $b+db$ . Пусть имеется поток частиц  $nv$  ( $n$  — плотность частиц,  $v$  — их скорость). В рассматриваемый телесный угол  $d\theta$  (и  $d\Omega$ ) рассеиваются частицы, находящиеся в элементарном объеме  $nv2\pi b db$ . Разделив эту величину на поток падающих частиц  $nv$ , получим выражение для дифференциального сечения рассеяния:

$$\sigma_{\theta}(b) = 2\pi b db. \quad (5.24)$$

Определим это сечение рассеяния в малый угол. В этом случае движение частицы в поле силового центра происходит по прямолинейной траектории, так что расстояние частицы от силового центра, согласно закону свободного движения, равно

$$r = \sqrt{b^2 + v^2 t^2}. \quad (5.25)$$

Поскольку на частицу со стороны силового центра действует сила в направлении, перпендикулярном траектории движения:

$$F_{\perp} = \frac{b}{r} \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right|, \quad (5.26)$$

частица приобретает в этом направлении импульс

$$\Delta p_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b}{r} \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| dt = \frac{2b}{v} \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}. \quad (5.27)$$

Отсюда находим

$$\theta = \frac{\Delta p_{\perp}}{p} = \frac{b}{\varepsilon} \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}, \quad (5.28)$$

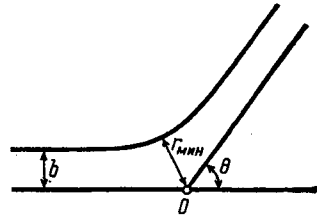


Рис. 7. Траектория относительного движения сталкивающихся частиц в системе центра масс:  $O$  — центр масс частиц;  $b$  — прицельный параметр;  $\theta$  — угол рассеяния

где  $p = \mu v$  — импульс;  $\epsilon = \mu v^2/2$  — энергия частиц, определяемая в системе центра масс. В частности, если  $V = A/r^n$ , формула (5.28) дает  $\theta = A/\epsilon b^n$ , то дифференциальное сечение рассеяния будет равно

$$d\sigma(b) = 2\pi b db = \frac{2\pi}{n} \left( \frac{C}{\epsilon} \right)^{2/n} \frac{d\theta}{\theta^{1+\frac{2}{n}}}, \quad (5.29)$$

где

$$C = \frac{A\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}. \quad (5.30)$$

В случае кулоновского взаимодействия частиц, когда  $V = e^2/r$ , получаем формулу Резерфорда

$$d\sigma(b) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon^2} \frac{d\theta}{\theta^3} = \frac{2\pi e^4}{\epsilon^2} \frac{d\theta}{\theta^3} = \frac{2\pi e^4 d\Delta\epsilon}{\epsilon \Delta\epsilon^2}, \quad (5.31)$$

где  $\Delta\epsilon$  — энергия, которой обмениваются сталкивающиеся частицы:

$$\Delta\epsilon = \frac{\Delta p_{\perp}}{2\mu} = \epsilon\theta^2.$$

Пусть  $\epsilon = E$  — энергия налетающего электрона, а  $E_{\text{ион}}$  — потенциал ионизации атома. Согласно уравнению (5.31) сечение столкновения налетающего электрона с энергией  $E$  и покоящегося электрона, при котором они обмениваются энергией в интервале от  $\Delta\epsilon$  до  $\Delta\epsilon + d\Delta\epsilon$ , равно

$$d\sigma(b) = \frac{\pi e^4}{E} \frac{d\Delta\epsilon}{\epsilon^2}. \quad (5.31a)$$

Интегрируя это выражение по передаваемой энергии от  $E_{\text{ион}}$  до  $E$ , получим для сечения ионизации атома выражение

$$\sigma_{\text{ион}} = \frac{\pi e^4}{E} \left( \frac{1}{E_{\text{ион}}} - \frac{1}{E} \right). \quad (5.32)$$

Эта формула носит название формулы Томсона и написана для одного валентного электрона. При наличии нескольких валентных электронов, которые принимают участие в ионизации, по ним следует провести суммирование. Уравнение (5.32) можно представить в ином виде

$$\sigma_{\text{ион}} = \frac{\pi}{E_{\text{ион}}} f\left(\frac{E}{E_{\text{ион}}}\right), \quad (5.33)$$

где  $f(x)$  — функция ионизации, равная, по Томсону,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}. \quad (5.33a)$$

Модель Томсона дает правильную качественную картину зависимости сечения ионизации от энергии налетающего электрона, но имеет два существенных недостатка. Во-первых, она приводит к слишком высоким значениям  $\sigma_{\text{макс}}$ , которые к тому же располагаются очень близко к порогу. Во-вторых, поведение сечения при высоких энергиях описывается не совсем правильно. Теория предсказывает, что при  $E \gg E_{\text{ион}}$

$$\sigma_{\text{ион}} \sim \frac{1}{E}, \quad (5.34)$$

в то время как в экспериментах наблюдается другая зависимость:

$$\sigma_{\text{ион}} \sim \frac{1}{E} \ln E. \quad (5.35)$$

Дальнейшее усовершенствование модели Томсона было связано с учетом движения атомного электрона. Чтобы получить логарифмическую зависимость сечения при высоких энергиях, Гривинский использовал эвристическую функцию распределения атомного электрона по скоростям:

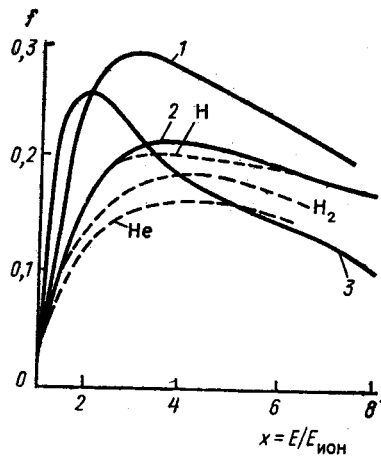


Рис. 8. Функция ионизации: 1 — модель Борна; 2 — модель Гривинского; 3 — модель Томсона; пунктирные линии — опытные данные

$$f(v) = \frac{\langle v \rangle^3}{v^3} e^{-\frac{v}{\langle v \rangle}}, \quad (5.36)$$

где  $\langle v \rangle$  — средняя скорость движения атомного электрона. Эту функцию трудно обосновать в деталях, хотя в целом она выглядит правдоподобно. Гривинский предположил, что средняя энергия атомного электрона совпадает с энергией связи. Для функции ионизации  $f(x)$  им было получено соотношение

$$f(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{x-1}{x+2} \right)^{3/2} \left[ 1 + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{2x} \right) \ln(e + \sqrt{x-1}) \right] \quad (5.37)$$

которое хорошо согласуется с опытными данными (рис. 8). Для сравнения на рис. 8 приводится кривая 1, вычисленная в борновском приближении. Из рисунка видно, что в основной области энергии полуэмпирическая модель Гривинского лучше отвечает опытными данным, чем борновское приближение.

## 2. Квантовая теория. Приближение Борна

Борновское приближение представляет собой первый порядок теории возмущений для системы атом—налетающий электрон.

Рассмотрим простой случай атома водорода, возбуждаемого из состояния 0 в состояние  $n$ . Пусть  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  — координаты атомного и налетающего электронов, причем они отсчитываются относительно неподвижного ядра.

Волновое уравнение для двух электронов в этом случае принимает вид

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + E - \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_1} + \frac{e^2}{r_2} \right] \psi = 0, \quad (5.38)$$

где  $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ .

Если электрон с волновым числом  $k_0$  налетает на атом, находящийся в основном состоянии с энергией  $E_0$ , то полная энергия определяется выражением

$$E = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m} k_0^2, \quad (5.39)$$

где  $k_0 = \frac{\sqrt{2m\varepsilon_0}}{\hbar}$ ;  $\varepsilon_0$  — энергия налетающего электрона.

Чтобы получить функцию  $\psi$  в приближении, достаточном для определения сечений упругих и неупругих столкновений, обычно ищут решение в виде

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left( \sum_n + \int \right) \psi_n(\mathbf{r}_1) F_n(\mathbf{r}_2), \quad (5.40)$$

где символ интегрирования учитывает вклад от сплошного спектра, а функции  $\psi_n$  являются функциями разных состояний. Подставляя уравнение (5.40) в (5.38) и зная, что

$$\left( \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 + E_n + \frac{e^2}{r_1} \right) \psi_n(\mathbf{r}_1) = 0, \quad (5.41)$$

получаем

$$\left( \sum_n + \int \right) \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_2^2 + k_n^2) + \frac{e^2}{r_2} - \frac{e^2}{r_{12}} \right\} \psi_n(\mathbf{r}_1) F_n(\mathbf{r}_2) = 0, \quad (5.42)$$

где

$$k_n^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_n). \quad (5.43)$$

Умножая уравнение (5.42) на  $\psi_n^*(\mathbf{r}_1)$  и интегрируя по  $d\mathbf{r}_1$ , получаем бесконечный ряд совместных дифференциальных уравнений для  $E_n$ :

$$(\nabla_2^2 + k_n^2) F_n = \left( \sum_n + \int \right) V_{nm} E_m, \quad (5.44)$$



где

$$V_{nm} = \frac{2me}{\hbar^2} \int \psi_n^* \left( \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_2} \right) \psi_m d\mathbf{r}_1. \quad (5.45)$$

Теперь надо найти решение этих уравнений. Решения представляют собой конечные непрерывные функции, асимптотическая форма которых имеет вид

$$F_n \sim e^{ik_0 r} \delta_{0n} + \frac{e^{ik_n r_2}}{r_2} f_n(\theta_2, \varphi_2), \quad (5.46)$$

где второй член выражения, стоящего в правой части, представляет амплитуду рассеянной волны в точке  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ .

Дифференциальное сечение возбуждения  $n$ -го состояния определяется соотношением

$$d\sigma_n(\theta, \varphi) d\Omega = |f_n(\theta, \varphi)|^2 d\Omega, \quad (5.47)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла около  $(\theta, \varphi)$ .

Для решения уравнения (5.44) Борн принял, что плоская волна, характеризующая ударяющую частицу электрона, не искажается силовым полем рассеивающей частицы (атома). В этом случае

$$F_0 = e^{ik_0 r} \quad (5.48)$$

и

$$(\nabla^2 + k_n^2) F_n = V_{n0} e^{ik_0 r}. \quad (5.49)$$

Это справедливо для энергии падающего электрона:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \gg E_0. \quad (5.50)$$

В результате этого при решении уравнения (5.44) методом итерации в качестве первого приближения Борна получается следующее выражение для функции  $f_n(\theta, \varphi)$ :

$$f_n(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int V_{n0} e^{i(k_0 - k_n) r_2} d\mathbf{r}_2, \quad (5.51)$$

где

$$|k_0 - k_n| = [(k_0^2 + k_n^2 - 2k_0 k_n \cos \theta)]^{1/2}. \quad (5.52)$$

Дифференциальное сечение возбуждения (или ионизации) в борновском приближении (ур. 5.51) равно

$$\sigma_\partial(\theta) = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left( \frac{k_n}{k_0} \right) |V_{0n}|^2. \quad (5.53)$$

Полное сечение

$$\sigma_n = 2\pi \int_0^\pi \sigma_\partial(\theta) \sin \theta d\theta \quad (5.54)$$

для оптически разрешенных переходов может быть представлено формулой

$$\sigma_n = \frac{4\pi m^2 e^4}{k_2 \hbar^4} |V_{0n}|^2 \ln \frac{2mv^2}{E_n - E_0}, \quad (5.55)$$

где  $(E_n - E_0)$  — разность энергий возбужденного и основного состояний атома. Борновское приближение хорошо работает при энергиях электрона  $E \geq 100$  эВ, но еще не релятивистских значениях энергии.

Для сечения ионизации получено следующее выражение:

$$\sigma_{\text{ион}} = \frac{2\pi e^4}{mv^2 |E_0|} \ln \frac{2mv^2}{C} \int |V_{0\kappa}| d\kappa. \quad (5.56)$$

Здесь  $C$  — некоторое среднее значение между  $E_{\kappa} - E_0$  порядка  $E_0$ ;  $\kappa$  — волновое число вылетевшего электрона, энергия которого находится между  $\frac{\hbar^2}{2m} \kappa^2$  и  $\frac{\hbar^2}{2m} (\kappa^2 + 2\kappa d)$ .

Из этого соотношения видно, что, если  $V_{0\kappa}$  не равен нулю, при больших энергиях падающего электрона сечения уменьшаются по закону

$$\sigma_{\text{ион}} \sim \frac{1}{E} \ln E, \quad (5.55a)$$

наблюдаемому в экспериментах.

Из теории Борна следует, что существует следующая связь между сечениями ионизации и энергией ударяющего электрона:

$$\sigma_{\text{ион}} = \begin{cases} 0, & E < E_{\text{ион}}, \\ \sim (E - E_{\text{ион}})^n, & E \geq E_{\text{ион}}, \end{cases} \quad (5.57)$$

где  $n$  — кратность ионизации;  $E_{\text{ион}}$  — потенциал ионизации атома. Для сечения возбуждения получается следующая зависимость:

$$\sigma_{\text{возб}} = \begin{cases} 0, & E < E_{\text{возб}}, \\ \sim (E - E_{\text{возб}})^{1/2}, & E \geq E_{\text{возб}}. \end{cases} \quad (5.58)$$

Электронный обмен может оказывать существенное влияние на вероятность возбуждения и ионизации атомов. Приближение Борна—Оппенгеймера позволяет учесть это влияние.

### 3. Возбуждение атомов и молекул

а. Метод искаженных волн. Большая часть расчетов сечений возбуждения атомов выполнена в борновском приближении. Анализируя опытные данные, Месси и Бархоп показали, что для разрешенных переходов борновское приближение (5.55) применимо к энергиям соударения, превосходящим примерно в семь раз энергию возбуждения (рис. 9). При мень-

ших значениях энергии соударения вычисленные сечения могут отличаться от измеренных в два раза и более.

Для медленных электронов приближение Борна перестает быть справедливым. В этом случае принимается более грубое предположение о том, что диагональные матричные элементы  $V_{nn}$  в уравнении (5.45) много больше недиагональных ( $m \neq$

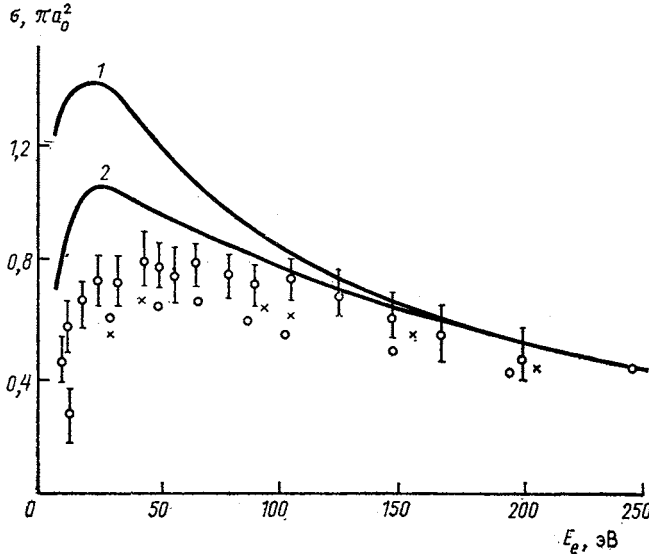


Рис. 9. Сечение возбуждения H-атома для перехода  $1s \rightarrow -2p$  ( $\pi a_0^2 = 8,806 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$ ): 1 — борновское приближение; 2 — метод искаженных волн

$\neq n$ ). Поэтому всеми недиагональными элементами, за исключением тех, которые связаны с начальным состоянием, можно пренебречь. При этом получается система уравнений

$$(\nabla^2 + k_0^2 - V_{00})F_0 = 0 \quad (5.59)$$

и

$$(\nabla^2 + k_n^2 - V_{nn})F_n = V_{n0}F_0, \quad n \neq 0. \quad (5.60)$$

Уравнение для упругорассеянной волны  $F_0$  имеет такой же вид, как и уравнение для частицы с волновым числом  $k_0$ , движущейся под действием статического потенциала  $\hbar^2 V_{00}/2m$ .

Уравнение для  $F_n$  может быть решено путем использования обобщенной функции Грина. Решение имеет вид

$$f_n(\theta_1, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int F_n(r_2, \pi - \gamma) V_{n0}(r_2) F_0(r_2, \theta_2) dr_2. \quad (5.61)$$

Здесь  $\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi - \varphi_2)$ ,  $F_0$  — решение уравнения (5.59), имеющее асимптотическую форму вида

(5.46). В то же время  $\mathcal{F}_n$  — решение однородного уравнения типа

$$(\nabla^2 + k_n^2 - V_{nn})\mathcal{F}_n = 0 \quad (5.62)$$

и имеет вид

$$\mathcal{F}_n \sim e^{ik_n r_1} + f_n(\theta_2, \varphi_2) \frac{e^{ik_n r_2}}{r_2} \quad (5.63)$$

Сравнение с первым приближением Борна (ур. 5.51) показывает, что теперь учтено искажение начальной и конечной электронных волн, обусловленное средним статическим полем атома в начальном и конечном состояниях.

**б. Случай сильной связи.** В методе искаженных волн предполагалось, что в процессе возбуждения промежуточное состояние вообще не играет никакой роли. Таким образом, можно было получить сразу уравнения (5.59) и (5.60), считая, что  $\psi$  в уравнении (5.40) имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_0(\mathbf{r}_1)F_0(\mathbf{r}_2) + \psi_n(\mathbf{r}_1)F_n(\mathbf{r}_2), \quad (5.64)$$

отсюда

$$(\nabla^2 + k_0^2 - V_{00})F_0 = V_{0n}F_n \quad (5.65)$$

и

$$(\nabla^2 + k_n^2 - V_{nn})F_n = V_{n0}F_0.$$

В приближении искаженных волн связь  $|V_{0n}|$  считается малой, так что  $V_{0n}F_n \approx 0$ . В некоторых случаях, когда промежуточными состояниями пренебрегают, а связь  $|V_{0n}|$  все же достаточно сильная, удовлетворительное приближение обеспечивается уравнениями (5.60) и (5.65), которые решаются методом итераций.

**в. Оптически запрещенные переходы.** В случае оптически запрещенных переходов  $V_{0n} = 0$  (ур. 5.55), и надо взять следующий член разложения функции  $e^{ikr}$  под знаком интеграла (5.51), что приведет к выражению

$$\sigma_{0n} = \frac{2\pi m^3 e^4}{k^2 \hbar^6} |V_{0n}|^2 |E_0|. \quad (5.66)$$

В этом случае эффективные сечения возбуждения уменьшаются со скоростью более резко:

$$\sigma_{0n} \sim \nu^{-2}, \quad (5.67)$$

чем в оптически разрешенных переходах, и имеют острый максимум (рис. 10). Такая зависимость характерна для переходов с изменением мультиплетности. В общем случае сечения запрещенных переходов намного меньше сечений разрешенных переходов.

**г. Полное эффективное сечение возбуждения.** Приближенное выражение, пригодное для грубой оценки полного эффективного сечения, являющегося суммой всех эффективных сече-

ний возбуждения, дано Ситоном в виде

$$i\sigma_j = \frac{4\pi^2}{v_e^2 \sqrt{3}} \frac{f(j, i) G(v_{ep}, v_e)}{\Delta E}, \quad (5.68)$$

где  $v_{ep}$  — скорость электрона после столкновения;  $f(j, i)$  — сила осциллятора линии;  $G$  — фактор Крамерса—Гаунта. Последний может быть написан в виде

$$G = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{v_e + v_{ep}}{|v_e' - v_{ep}|} \right) \quad (5.68a)$$

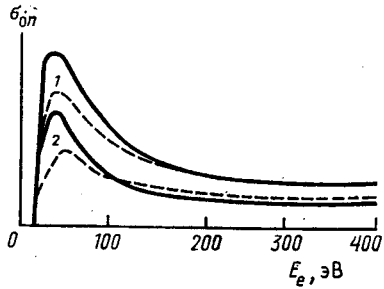


Рис. 10. Сечение возбуждения Не-атома (относительный масштаб) для перехода  $1^1S-4^1D$  (кривые 1) и для перехода  $1^1S-5^1D$  (кривые 2). Сплошные кривые вычислены в приближении Борна—Оппенгеймера, пунктирные кривые—опытные данные

и определяет отклонение спектрального распределения от классического.

#### 4. Взаимодействие медленных электронов с атомами и молекулами

а. Захват электронов. Процессы столкновений, при которых относительно медленные электроны захватываются атомами и молекулами и образуются отрицательные ионы, происходят с выделением энергии, так как энергия устойчивого отрицательного иона несколько меньше энергии исходного атома или молекулы.

Энергия связи избыточного электрона называется энергией сродства атома или молекулы к электрону. Наиболее надежным способом определения энергии сродства атома к электрону является метод поверхностной ионизации, основанный на измерении отношения токов отрицательных ионов двух различных элементов.

Классические измерения сечения захвата производились путем исследования ослабления электронного роя, перемещающегося в газе под действием однородного электрического поля с напряженностью  $E$  при давлении газа в несколько мм рт. ст. Отношение электронных токов после прохождения отрезков  $x_1$  и  $x_2$  равно

$$I_{2c}/I_{1c} = e^{-\eta(x_2 - x_1)}, \quad (5.69)$$

где  $\eta$  — коэффициент захвата, равный вероятности захвата молекулой газа электрона при прохождении им единицы пути по

направлению электрического поля. Величина  $\eta$  связана с эффективным сечением захвата  $\sigma_a$  формулой

$$\eta = \frac{n_0 \sigma_a \langle v_e \rangle}{v_d}, \quad (5.70)$$

где  $\langle v_e \rangle$  — средняя скорость хаотического движения, а  $v_d$  — скорость дрейфа электронов.

Более существенными являются процессы захвата электронов молекулярными газами, поскольку они зачастую сопровождаются колебательным возбуждением или диссоциацией молекул. Сечение образования связанного состояния электрона и молекулы определяется формулой Брейта—Вигнера

$$\sigma = (2l + 1) \frac{\pi}{v^2} \frac{\Gamma_{\text{упр}} \Gamma}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad (5.71)$$

где  $E$ ,  $v$ ,  $l$  — энергия, скорость и момент электрона;  $\Gamma$  — полная ширина уровня квазистационарного состояния отрицательного иона молекулы;  $\Gamma_{\text{упр}}$  — ширина уровня, соответствующая его распаду на первоначальную молекулу и электрон;  $E - E_0$  — разность между энергиями отрицательного молекулярного иона и молекулы.

**б. Колебательное возбуждение и диссоциация молекул.** Сечение колебательного возбуждения или диссоциации молекулы при столкновении с электроном, которое идет через образованные отрицательного молекулярного иона, равно

$$\sigma_{\text{неупр}} = (2l + 1) \frac{\pi}{v^2} \int \frac{\psi^2(R) dR \Gamma_{\text{упр}} \Gamma_{\text{неупр}}}{[E - E_0(R)]^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad (5.72)$$

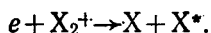
здесь  $\psi^2(R)$  учитывает распределение ядер в некоторой области расстояний, в которой может меняться и терм связанного состояния электрона и молекулы  $E_0(R)$ ;  $\Gamma_{\text{неупр}}$  — неупругая ширина уровня квазистационарного состояния отрицательного молекулярного иона, соответствующая его распаду по данному каналу.

Найденное Шульцем максимальное сечение возбуждения колебательных уровней азота электронным ударом при 2,0—2,5 эВ составляет  $[3-5] \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup>. Для водорода оно на порядок меньше и составляет при 2 эВ примерно  $6 \cdot 10^{-17}$  см<sup>2</sup>.

При монотонной зависимости электронного терма молекулы от расстояния между ядрами и малых энергиях взаимодействия ядер (по сравнению с энергией диссоциации) диссоциации практически не наблюдается при столкновении электрона с молекулой. Отсюда можно заключить, что сечение диссоциации молекулы при столкновении молекулы с медленными электронами будет много меньше сечений возбуждения и ионизации. Диссоциация молекулы электронным ударом обязана

электронному возбуждению молекулы. Так, например, порог диссоциации молекулы водорода электронным ударом наблюдается при энергии электрона  $8,8 \pm 0,2$  эВ, что соответствует образованию  $^3\Sigma_u^+$ -состояния и последующему обменному взаимодействию электрона с молекулой. Максимум в сечении диссоциации молекулы водорода электронным ударом наблюдается при энергии электрона 16,5 эВ и составляет  $9 \times 10^{-17}$  см<sup>2</sup>.

**в. Рекомбинация молекулярных ионов.** В плотной плазме низкой температуры образуются в основном молекулярные ионы. Рекомбинация молекулярного иона с электроном происходит, как правило, быстрее, чем рекомбинация атомных ионов, так как она совершается без участия третьей частицы. Рекомбинация приводит к диссоциации иона в соответствии со схемой процесса:



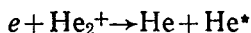
Если принять, что сечение рекомбинации не зависит ни от колебательного, ни от вращательного состояния молекул, то

$$\sigma_{\text{рек}} \simeq \frac{g_a g_a^*}{g_e g_i} \frac{h^2}{m(\epsilon_{\text{я}} + D_0 - \epsilon_{\text{ион}}^*) n_{\text{эф}}} \quad (5.73)$$

В этом выражении

$$\epsilon_{\text{я}} = \frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2} = \epsilon_e + \epsilon_{\text{ион}}^* - D_0, \quad (5.74)$$

где  $D_0$  — энергия диссоциации молекулярного иона в основном колебательном и вращательном состояниях;  $\epsilon_{\text{ион}}^*$  — потенциал ионизации возбужденного атома. В уравнении (5.73)  $n_{\text{эф}}$  — эффективное число колебательных состояний молекулярного иона, в которых он может образовываться при ассоциативной ионизации. Обычно значение  $(\epsilon_{\text{я}} + D_0 - \epsilon_{\text{ион}}^*)$  мало ( $\sim 1$  эВ) а статистический вес возбужденного атома  $g_a^*$  велик, поэтому сечение рекомбинации превышает сечение обратного процесса. Так, в случае реакции



при тепловых энергиях  $\sigma_{\text{рек}} \sim 10^{-13}$  см<sup>2</sup>, тогда как сечение обратного процесса  $\sigma_{\text{ион}} \sim 2 \cdot 10^{-15}$  см<sup>2</sup>.

## § 5. НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

### 1. Ионизация и возбуждение атомными частицами

Эффективное сечение возбуждения водородоподобного атома с зарядом  $z_a e$  из состояния  $p$  в состояние  $q$ , вызываемой ударом голого ядра с зарядом  $z_b e$ , в первом приближении

Борна можно записать в виде

$${}_p\sigma_q = \left[ \frac{8z_b^2}{s^2} \int_{t, \text{ мин}}^{\infty} |V(p, q)|^2 t^{-3} dt \right] \pi a_0^2, \quad (5.75)$$

где

$$V(p, q) = \int f_p^* f_q e^{i\mathbf{tr} \cdot \mathbf{q}} d^3\mathbf{r}_a; \quad (5.76)$$

$$s^2 = \frac{1}{2} \frac{m_e v_1^2}{\varepsilon_1^{\text{H}}}; \quad (5.77)$$

$$t_{\text{мин}} = \frac{\varepsilon_{\text{возб}}}{2s} \left\{ 1 + \frac{m_e \varepsilon_{\text{возб}}}{4\mu s^2} \right\}. \quad (5.78)$$

Здесь  $f$  — нормированные на единицу собственные функции;  $\mathbf{r}_a$  — радиус-вектор электрона;  $t$  — переменная интегрирования;  $\varepsilon_1^{\text{H}}$  — потенциал ионизации атома водорода (13,595 эВ).

Математически эквивалентное выражение можно получить с помощью метода прицельных расстояний:

$${}_p\sigma_q = 2\pi \int_0^{\infty} b P_{pq} db, \quad (5.79)$$

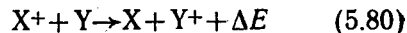
где  $P_{pq}$  — вероятность перехода, определяемая потенциальной энергией взаимодействия, скоростью налетающей частицы и расстоянием между ядрами.

В случае более медленных частиц, для которых борновское приближение неприменимо, широко используется приближение искаженных волн (рис. 11).

Эффективное сечение возбуждения значительно меньше эффективных сечений ионизации и составляет  $(1-2) \cdot 10^{17}$  см<sup>2</sup> в случае столкновений  $\text{H}^+ - \text{H}_2$  при  $\varepsilon_{\text{H}^+} = 1-3$  кэВ.

## 2. Процессы перезарядки атомов

а. Симметричная резонансная перезарядка. Формула Розена — Зенера. Обычная перезарядка:



связана с переходом от атома мишени  $\text{Y}$  к иону  $\text{X}^+$  одного электрона и очень малого количества кинетической энергии. Процесс

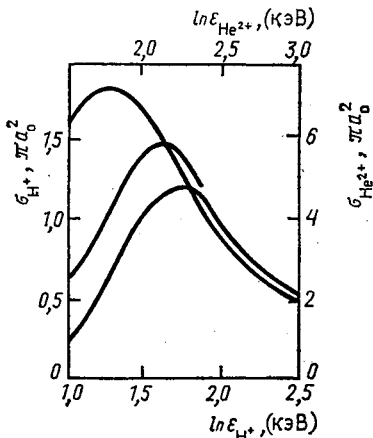
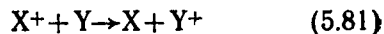


Рис. 11. Сравнение сечений возбуждения  $\text{H}$ -атома в состоянии  $2p$  ионами  $\text{H}^+$  и  $\text{He}^{2+}$ , вычисленных Бэйтсом в борновском приближении (верхняя кривая) и методом искаженных волн (средняя кривая — для  $\text{H}^+$ , нижняя кривая — для  $\text{He}^{2+}$ )



с нулевым значением дефекта энергии носит название симметричной резонансной перезарядки. Эффективное сечение его по величине может быть таким же, как газокинетическое эффективное сечение или даже больше. Теория резонансной симметричной перезарядки в ее первоначальном виде была предложена Мессе и Смитом.

Это явление рассматривалось как переход между симметричными и антисимметричными стационарными состояниями квазимолекулы. Вероятность перехода вычислялась методом возмущенных стационарных состояний квазимолекулы. Эффективное сечение перехода равно

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\infty} bP(b) db. \quad (5.79a)$$

Вероятность перехода  $P(b)$  системы в конечное состояние  $q$  дается формулой Розена—Зенера

$$P = \frac{\lambda^2}{\Omega^2} \sin^2 \left( \frac{\Omega}{\lambda} \right), \quad (5.82)$$

где

$$\Omega(b) = \int_{-\infty}^{\infty} V_{pq} dx = \int_{-\infty}^{\infty} V_{qp} dx,$$

$$\lambda(b, v) = \int_{-\infty}^{\infty} V_{pq} e^{i\alpha x} dx,$$

$\alpha = \Delta\varepsilon/v$ , а величина  $V_{pq}$  — матричный элемент потенциала взаимодействия. Формула Розена—Зенера применима к перезарядке и к процессу передачи возбуждения либо при наличии точного баланса энергии, либо когда взаимодействие достаточно мало и справедливо борновское приближение.

Простой метод решения задачи был предложен Фирсовым. Из формулы (5.82) видно, что при изменении  $\Omega/v$  значение вероятности перехода  $P$  колеблется между нулем и  $\lambda^2/\Omega^2$ , и эффективное сечение перезарядки может быть выражено в виде

$$\sigma_r = 2\pi \int_0^{b^*} \frac{\lambda^2}{2\Omega^2} b db, \quad (5.83)$$

где  $b^*$  — наибольший корень уравнения;

$$b = v/\pi. \quad (5.84)$$

При малых прицельных параметрах столкновения приближение Фирсова дает

$$\sigma_r = \frac{\pi}{2} b^{*2}. \quad (5.85)$$

На рис. 12 приведено сопоставление вычисленных по уравнению (5.85) значений  $\sigma$  с опытными данными по резонансной перезарядке протона на атоме водорода. Эффективные сечения симметричной перезарядки сильно зависят от ионизационного потенциала (рис. 13).

Симметричная резонансная перезарядка между однородными двухатомными молекулярными ионами и молекулами возможна только в том случае, когда в молекуле и ионе совпадают равновесные расстояния между ядрами и колебательные

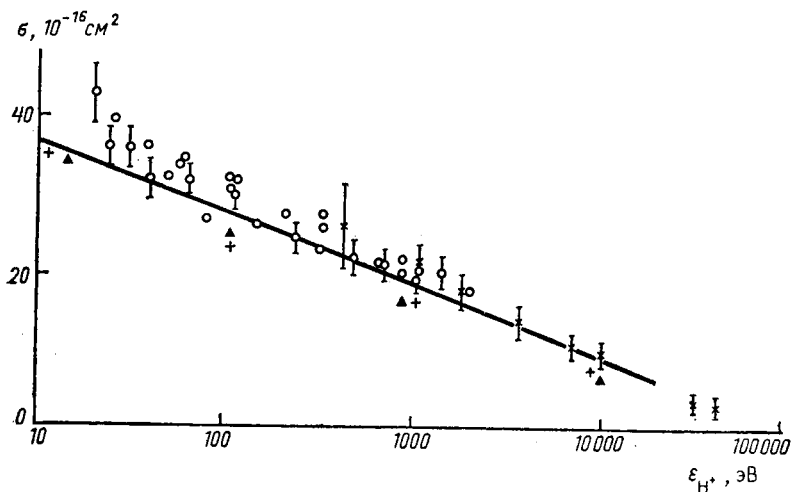


Рис. 12. Резонансная перезарядка протона на атоме водорода: + — расчет Дальгарно (Dalgarno A., Yadov H. D. // Proc. Phys. Soc. 1956. Vol. A69. P. 615);  $\blacktriangle$  — расчет Мурахвера (Мурахвер Ю. Е. // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. С. 1241)

уровни. В связи с тем, что такое совпадение встречается редко, эффективное сечение уменьшается вследствие нарушения принципа Франка—Кондона.

**б. Несимметричная перезарядка. Адиабатический критерий Мессе.** В случае несимметричной перезарядки (между разнородными ионами и атомами) проблема сложна даже при больших скоростях относительного движения, поскольку неизвестен потенциал взаимодействия.

Процессу перезарядки между разнородными ионами  $A^+$  и атомами  $B$  соответствует дефект внутренней энергии:

$$\Delta \epsilon = \epsilon_{\text{ион}}(A) - \epsilon_{\text{ион}}(B). \quad (5.86)$$

Эффективные сечения малы при самых малых энергиях; с увеличением энергии они растут, достигают максимума и далее уменьшаются, как и в случае резонансного процесса. Мессе был предложен так называемый «адиабатический критерий».

Обычно имеется область взаимодействия, в которой энергия относительного движения так мала, что движение электронов как бы приспособливается к небольшим изменениям межъядерного расстояния. Это адиабатическое приспособление делает вероятность рассматриваемого перехода столь же малой, как и при полном отсутствии относительного движения частиц.

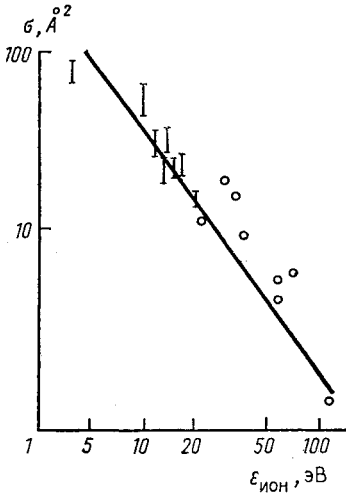


Рис. 13. Зависимость сечения симметричной перезарядки от ионизационного потенциала: вертикальными линиями обозначены экспериментальные данные (верхняя черта) и расчетные данные Фирсова (нижняя черта)

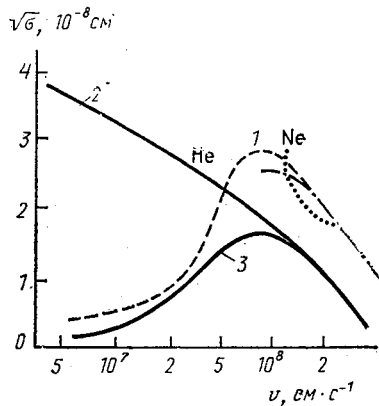


Рис. 14. Сравнение расчетных и опытных сечений перезарядки: 1 —  $\text{He}^+ - \text{Ne}$  ( $|\Delta\epsilon| = 3,02$  эВ); 2 —  $\text{He}^+ - \text{He}$  ( $\Delta\epsilon = 0$ ); 3 — для процесса  $\text{He}^+ - \text{He}$  ( $|\Delta\epsilon| = 3$  эВ)

Пусть  $\Delta\epsilon(Q)$  — разность двух любых адиабатических термов в точках конфигурационного пространства ядер, а  $l(Q)$  — характерная длина, на которой существенно меняется волновая функция быстрой подсистемы (электронов). Если скорость относительного движения ядер  $v$ , то критерий Мессе

$$\xi = \frac{\Delta\epsilon l}{\hbar v} \approx \frac{t_{\text{яд}}}{t_{\text{эл}}} \quad (5.87)$$

дает отношение времени прохождения медленной системой отрезка к характерному времени движения быстрой подсистемы. В теории неадиабатических переходов показано, что в тех областях конфигурационного пространства медленной подсистемы, где параметр Мессе велик ( $\xi \gg 1$ ), неадиабатические переходы маловероятны, поскольку при малых  $v$  быстрая подсистема успевает безынерционно следовать за медленной. Это зна-

чит, что может быть использовано адиабатическое приближение.

В тех областях, где условие  $\xi \gg 1$  нарушается, неадиабатические переходы могут происходить с большой вероятностью. При этом  $\epsilon(Q)$  теряет смысл потенциальной энергии, и движение медленной и быстрой подсистем нельзя рассматривать независимо; поэтому вычисление вероятностей и сечений переходов, особенно в области не очень высоких энергий, является трудной задачей. В этих случаях эффективные сечения нерезонансной перезарядки выражаются формулой Раппа и Френсиса

$$\sigma = \int \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\Delta \epsilon}{\hbar v} \left( \frac{\alpha \pi b}{2\gamma} \right)^{1/2} \right\} 2\pi b db, \quad (5.88)$$

где

$$a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \quad \gamma = \left( \frac{\epsilon_i}{\epsilon_1^H} \right)^{1/2}.$$

Рассчитанные по этой формуле и опытные значения эффективных сечений перезарядки  $\text{He}^+ - \text{He}$  приведены на рис. 14.

Эффективные сечения перезарядки определяются не только дефектом энергии и потенциалами ионизации, но и статистическими весами. Из принципа детального равновесия отношение эффективных сечений неупругих процессов столкновений, идущих в прямом и обратном направлениях, пропорционально отношению статистических весов конечного и начального состояний системы:

$$\frac{\overset{\rightarrow}{\sigma}}{\overset{\leftarrow}{\sigma}} = \frac{g_2}{g_1}. \quad (5.89)$$

Это отношение применимо не только к прямым и обратным процессам. Оно позволяет сравнить эффективные сечения двух процессов, обладающих различными статистическими весами, которые имели бы одинаковые эффективные сечения, если бы этого различия не было. Примером могут служить процессы случайного резонанса, например, для  $\text{H}^+ - \text{H}$  и  $\text{O}^+ - \text{H}$ , когда ионизационные потенциалы фактически одинаковы, а отношение статистических весов равно  $3/2$ . Указанные процессы исследованы Файтом и сотр. (рис. 15).

**в. Псевдопересечение кривых потенциальной энергии. Формула Ландау—Зенера.** Если рассматривать процесс перезарядки на основе двух кривых потенциальной энергии начального и конечного состояний системы, то с классической точки зрения возможно такое положение, при котором кривые пересекаются редко, однако можно рассчитать для этой системы две кривые собственных энергий при межъядерных расстояниях, близких к точке классического пересечения. Вид этих кривых показан на рис. 16 (вверху).

Переходы могут происходить в области пересечения, в месте, где форма кривых потенциальной энергии искажена. Вероятность перехода в точке пересечения вычислена Ландау и Зенером.

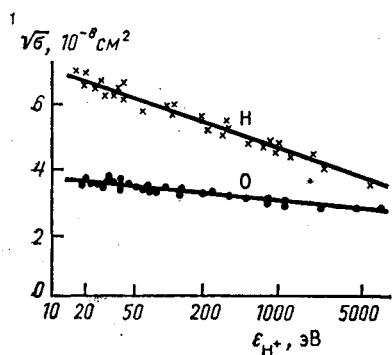


Рис. 15. Эффективные сечения перезарядки:  $H^+ - H$  и  $H^+ - O$

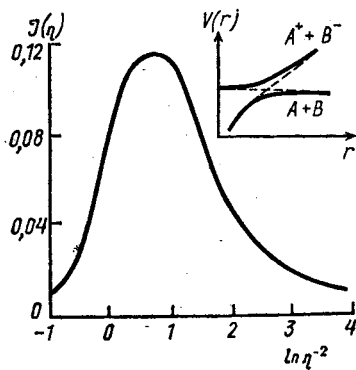


Рис. 16. Расчетные значения интеграла  $\mathcal{J}(\eta)$  по данным Моисейвича

Формула Ландау—Зенера для вероятности перехода имеет вид

$$P = e^{-W}, \quad (5.90)$$

где

$$W = \frac{(2\pi/\hbar)V_{mn}^2}{v(V'_{nn} - V'_{mn})}. \quad (5.91)$$

Выражение

$$V_{.nn} = \int \varphi_m^* \left( \frac{r}{R} \right) H \varphi_n \left( \frac{r}{R} \right) dr \quad (5.92)$$

получило название матричного элемента взаимодействия. Здесь  $H$  — оператор Гамильтона;  $\varphi_m$  и  $\varphi_n$  — ортогональные линейные комбинации волновых функций  $\psi_m$  и  $\psi_n$ . Переменная  $r$  определяет положение электрона, совершающего переход относительно середины межъядерного расстояния  $R$  (в случае классического пересечения  $R = R_x$ ). В качестве матричных элементов можно принять разность собственных значений энергии. Разность энергий в точке пересечения, соответствующую  $V_{mn}$ , обозначим через  $\Delta U_{R_x}$ . Если эта величина известна, то эффективное сечение можно представить в виде

$$\sigma = 4\pi R_x^2 \mathcal{J}(\eta) P, \quad (5.93)$$

где

$$\mathcal{J}(\eta) = \int_0^\infty e^{-\eta x} (1 - e^{-\eta x}) x^{-3} dx \quad (5.94)$$

$$\eta = 247\mu^{1/2}n \frac{\Delta U_{R_x}}{(\Delta \epsilon_\infty)^2 e_P^{1/2}}. \quad (5.95)$$

Здесь  $\mu$  — приведенная масса;  $(n+1)$  — кратность заряда, сталкивающегося с атомом иона;  $P$  — вероятность образования конечного состояния, определяемая законом сохранения спина и его проекции. Интеграл  $\mathcal{Z}(\eta)$  может быть записан в виде комбинации неполных гамма-функций. Моисейвич вычислил его значение и показал, что при  $\eta=0,424$   $\mathcal{Z}(\eta)$  достигает максимальной величины 0,113 (см. рис. 16). Формула Ландау—Зенера удовлетворительно описывает процессы перезарядки многозарядных ионов на атомах и рекомбинацию положительного и отрицательного ионов.

## § 6. СТОЛКНОВЕНИЯ ВОЗБУЖДЕННЫХ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

### 1. Передача возбуждения

Процесс



при котором возбужденный атом  $X^*$ , сталкиваясь с атомом  $Y$ , находящимся в основном состоянии, переходит без излучения в основное состояние, а другой атом переходит в возбужденное состояние, впервые был рассмотрен Франком.

Ранее отмечалось, что в процессе (5.96) столкновения двух одинаковых атомов возникает «обменное» взаимодействие, обратно пропорциональное третьей степени расстояния.

Первые экспериментальные исследования процесса (5.96) названного «сенсibilizированная флуоресценция», были проведены Карио и Франком. Они облучали смесь паров ртути и таллия ртутной лампой и измеряли интенсивность испускаемых линий таллия. На рис. 17 представлены результаты опытов по взаимодействию возбужденных атомов ртути с

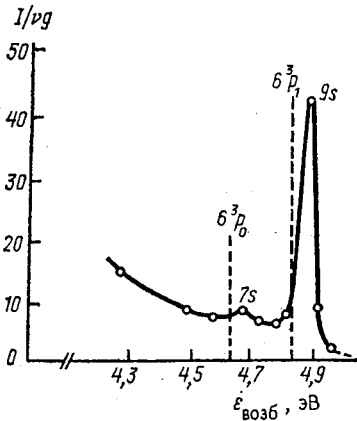


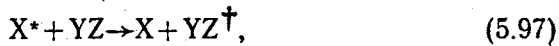
Рис. 17. Интенсивность излучения атомов Na, возбужденных атомами  $Hg^+$ , находящимися в состояниях  $6^3P_0$  и  $6^3P_1$

атомами натрия. Как видно из рисунка, при прочих равных условиях вероятность процесса тем больше, чем меньше дефект энергии.

Вигнером было показано, что из всех возможных процессов передачи энергии с примерно одинаковым значением  $|\Delta\epsilon|$  наиболее вероятен процесс, при котором полный результирующий спин двухатомной системы остается прежним (правило Вигнера).

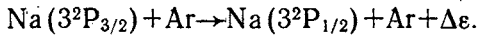
## 2. Тушащие столкновения

Тушащими называются столкновения, при которых в результате добавления небольшого количества примесного газа сильно уменьшается интенсивность резонансного излучения разряда. Резонансные возбужденные состояния разрушаются в результате процессов типа



где  $YZ^\dagger$  — колебательно-возбужденная молекула.

Столкновения с тушением иногда могут происходить и без возбуждения колебаний, но такие процессы возможно только в случае очень малых значений разности внутренних энергий, например



## 3. Столкновения метастабильных атомов

Если атом находится в состоянии, для которого дипольное излучение запрещено, то излучение все же возможно, если в процессе столкновения с другим атомом образуется квазимолекула в таких состояниях, из которых переход является разрешенным. Это явление известно как излучение, индуцированное столкновением. В результате такого процесса, например, разрушается метастабильное состояние гелия  $2^1S$  и в спектре гелия появляется непрерывная полоса в области 600 Å.

Квантово-механические расчеты эффективного сечения процесса, приводящего к излучению, индуцированному столкновением, были выполнены Крамерсом и Тер-Хааром. При тепловых энергиях среднее эффективное сечение такого процесса равно

$$\langle \sigma \rangle = \frac{4\pi\mu}{3c^3 h^4 k^2 T_g} \int_0^\infty r^2 [\mu(r)]^2 \mathcal{G}(r) \{V_m(r) - V(r)\}^3 dr, \quad (5.98)$$

где

$$\mathcal{G}(r) = \int_{v_{\min}}^\infty v_r e^{-\frac{\mu v_r^2}{2kT}} \left\{ \sqrt{v_2^2 - \frac{2V_m(r)}{\mu}} - \sqrt{v_r^2 - \frac{2V_m(r)}{\mu} - \frac{v_2^2 b^2}{r^2}} \right\} dv_r. \quad (5.99)$$

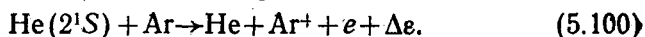
Здесь  $\mu(r)$  — дипольный момент, соответствующий определенному молекулярному переходу при межъядерном расстоянии  $r$ ;  $\mu$  — приведенная масса;  $g$  — статистический вес начальных состояний молекулы;  $b_{\text{макс}}$  — максимальное значение прицельного параметра столкновения, согласующееся с выбранными значениями относительной скорости  $v_r$ ;  $V(r)$  и  $V_m(r)$  — потенциальные энергии взаимодействия двух атомов в основном состоянии и взаимодействия атома в метастабильном состоянии с атомом в основном состоянии.

При столкновении атома  $\text{He}^*$  в состоянии  $2^1S$  с атомом  $\text{He}$  в основном состоянии соответствующими молекулярными состояниями являются  $2^1\Sigma_u$  и  $2^1\Sigma_g$ .

Из них последнее в результате радиационного перехода может перейти в состояние  $1^1\Sigma_g$ . Среднее эффективное сечение этого процесса при 300 К, вычисленное по формуле (5.98), оказалось равным  $0,9 \cdot 10^{-20}$  см<sup>2</sup>.

В присутствии третьего атома или молекулы увеличивается вероятность образования молекулы  $\text{He}_2$  в результате «прилипания» возбужденного атома  $\text{He}^*$  к атому  $\text{He}$  в основном состоянии. Время жизни молекулы  $\text{He}_2$  (состояние  $3^3\Sigma_u^+$ ) составляет  $\sim 0,05$  с.

При столкновении метастабильных атомов с атомами или молекулами более легко ионизируемого газа может происходить ионизация Пеннинга, например



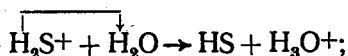
### § 7. ИОННО-МОЛЕКУЛЯРНЫЕ РЕАКЦИИ

Простейший процесс ионно-молекулярной реакции может быть представлен в виде

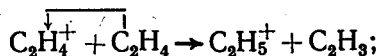


К таким процессам относятся:

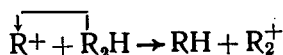
а) процессы с переходом протона



б) процессы с переносом атома водорода



в) процессы с переносом гидрида



и многие другие.

Весьма часто константы скорости реакций ионов с молекулами не зависят от температуры и обладают большими сечениями (до  $10^{-14}$  см<sup>2</sup>). Указанные эффекты связаны в основном с дальнедействующими силами притяжения между ионами и поляризуемыми молекулами или диполями.



В силу закона сохранения момента количества движения в системе центра масс траектории движения частиц полностью определяются прицельным параметром  $b$  и энергией относи-

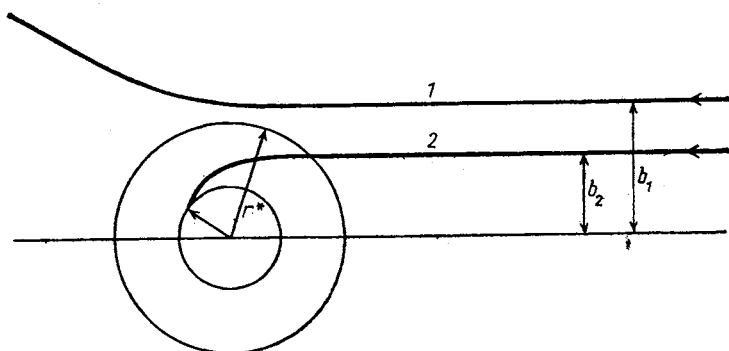


Рис. 18. Различие в траекториях ионно-молекулярных реакций: 1 — траектория, не ведущая к реакции; 2 — траектория, приводящая к реакции

тельного поступательного движения  $E$  (рис. 18). Радиальное движение происходит в поле эффективного потенциала:

$$V_{\text{эф}}(r, b) = V(r) + \frac{b^2 E}{r^2}, \quad (5.102)$$

где

$$V(r) = -\frac{\alpha e^2}{2r^4} \quad (5.103)$$

— потенциальная энергия взаимодействия иона с молекулой по Ланжевону,  $\alpha$  — поляризуемость молекулы,  $r$  — расстояние между ионом и молекулой.

Если энергия поступательного движения такова, что ионно-молекулярная пара может преодолеть центробежный барьер  $V(r^*, b)$  (рис. 19), то вероятность протекания реакции достаточно велика.

Функция  $V_{\text{эф}}(r)$  имеет максимум при  $r=r^*$ , где

$$r^* = \left( \frac{\alpha e^2}{b^2 E} \right)^{1/2}, \quad (5.104)$$

а

$$V_{\text{эф}}(r^*) = \frac{b^4 E^2}{2\alpha e^2}. \quad (5.105)$$

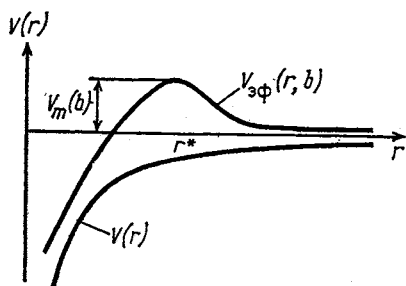


Рис. 19. Эффективный потенциал  $V_{\text{эф}}(r, b)$  для образования ионно-молекулярной пары

Для преодоления такого потенциального барьера необходимо выполнение условия

$$E \geq V_{\text{эф}}(r^*) = \frac{b^4 E^2}{2\alpha e^2}. \quad (5.106)$$

Это условие определяет максимальное (критическое) значение прицельного параметра  $b_c$  (при заданном значении  $E$ ), при котором возможна реакция

$$b_c = \left( \frac{2\alpha e^2}{E} \right)^{1/4} = \left( \frac{4\alpha e^2}{\mu v^2} \right)^{1/4}. \quad (5.107)$$

Если обозначить вероятность реакции через  $P_R(b, E)$ , то сечение реакции можно записать в виде

$$\sigma_R(v) = 2\pi \int_0^{b_c} P_R(b, E) b db = \pi \int_0^{b_c} d\sigma_R(b, E). \quad (5.108)$$

Отсюда для экзотермической реакции ( $P_R(b, E) = 1$ )

$$\sigma_R(v) = \pi b_c^2 = \frac{2\pi}{v} \left( \frac{\alpha e^2}{\mu} \right)^{1/2}; \quad (5.109)$$

для эндотермической реакции ( $P_R(b, E) = 0$ )  $\sigma_R = 0$ .

Поскольку в уравнении (5.109) сечение реакции оказывается пропорциональным  $v^{-1}$ , то  $v\sigma_R(v)$  не зависит от скорости, а  $k_\sigma$  не зависит от температуры. При равновесном распределении частиц по скоростям поступательного движения выражение для статистической константы скорости:

$$k_\sigma(T) = \int v \sigma_R f_{X^+}(\mathbf{v}_{X^+}) f_{YZ}(\mathbf{v}_{YZ}) d\mathbf{v}_{X^+} d\mathbf{v}_{YZ} \quad (5.110)$$

приобретает вид

$$k_\sigma(T) = \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v \sigma_R(v) e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv. \quad (5.111)$$

Подставляя в уравнение (5.111)  $dv = 4\pi v^2 dv$ , получим

$$k_\sigma(T) = 4\pi \left( \frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \sigma_R(v) e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}} dv. \quad (5.112)$$

Из уравнений (5.109) и (5.112) после интегрирования найдем

$$k_\sigma(T) = 2\pi \left( \frac{\alpha e^2}{\mu} \right)^{1/2}. \quad (5.113)$$

С учетом вероятностного фактора  $P_R(v, E)$  уравнение (5.113) примет окончательный вид

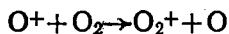
$$k_\sigma(T) = 2\pi P_R(v, E) \left( \frac{\alpha e^2}{\mu} \right)^{1/2}. \quad (5.114)$$

Факт независимости константы скорости от температуры явился основной предпосылкой для теоретической интерпретации данных, полученных при исследовании реакций между ионами и нейтральными молекулами.

Сечения ион-молекулярных реакций при энергиях 5—100 эВ можно измерять методом скрещенных пучков. Специфические трудности, которые возникают при анализе продуктов по массе, разрешаются с помощью квадрупольных масс-спектрометров.

Наиболее перспективные методы исследования ион-молекулярных реакций при тепловых энергиях основаны на классическом измерении подвижности ионов в ионизованных газах и коэффициентов скоростей распадающейся плазмы.

Проще всего определять сечения для атомарных ионов, так как при отсутствии процессов ионно-атомного обмена или перезарядки их концентрация уменьшается лишь в результате сравнительно медленных процессов диффузии и рекомбинации с излучением. Так, например, экзотермический процесс



приводит к исчезновению ионов  $\text{O}^+$  с частотой столкновения

$$v_i = \sigma_i n_{\text{O}_2} \langle v_{\text{O}^+} \rangle = k_i n_{\text{O}_2}. \quad (5.115)$$

Если пренебречь рекомбинацией с излучением, то уменьшение концентрации ионов  $\text{O}^+$  в распадающейся плазме будет определяться уравнениями

$$\frac{dn_{\text{O}^+}}{dt} = D_a \nabla^2 n_{\text{O}^+} - v n_{\text{O}^+}, \quad (5.116)$$

$$n_{\text{O}^+} = n_{\text{O}^+}^0 e^{-t/\tau}, \quad (5.117)$$

$$\frac{p}{\tau} = \frac{p D_a}{l_D^2} + v_i p, \quad (5.118)$$

где  $l_D$  — диффузионная длина ( $l_D = \sqrt{\pi D t}$ ), а  $p$  — полное давление газа.

Результаты измерений времени спада концентрации ионов анализируют с помощью графика зависимости  $p/\tau$  от давления  $p$ ; наклон кривой дает величину  $p v_i$ , а ее пересечение с осью ординат — величину  $D_a/l_D^2$ .

Более общей задачей при исследовании распадающейся плазмы является изучение процесса взаимного превращения ионов двух типов, концентрация каждого из которых уменьшается в результате процессов диссоциативной рекомбинации, характеризующихся не слишком малыми скоростями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и коэффициентами амбиполярной диффузии  $D_{a_1}$  и  $D_{a_2}$ . В этом

случае скорость взаимного превращения ионов двух типов можно записать в виде

$$\frac{dn_{1+}}{dt} = -\alpha_1 n_e n_{1+} - k_{12} n_2 n_{1+} - \sum_j k_{1j} n_{1+} n_j + D_{a_1} \nabla^2 n_{1+} + \dots, \quad (5.119)$$

$$\frac{dn_{2+}}{dt} = -\alpha_2 n_e n_{2+} + k_{12} n_1 n_{2+} - \sum_j k_{2j} n_{2+} n_j + D_{a_2} \nabla^2 n_{2+} + \dots$$

Здесь  $k_{12}$  — коэффициент скорости процесса взаимного превращения ионов 1 и 2,  $k_{1j}$  и  $k_{2j}$  — коэффициенты скорости всех

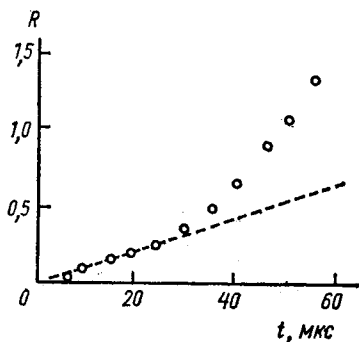


Рис. 20. Зависимость  $R = [O_2^+]/[N_2^+]$  от  $t$  в распадающейся плазме

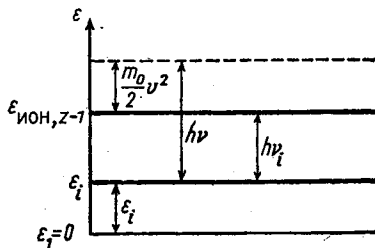


Рис. 21. Фотоионизация атомов или ионов

остальных процессов взаимного превращения. Скорость изменения отношения концентрацией ионов  $n_{1+}$  и  $n_{2+}$  ( $R = n_{2+}/n_{1+}$ ) выражается уравнением

$$\frac{dR}{dt} = R \left\{ (\alpha_1 - \alpha_2) n_e + (k_{1j} - k_{2j}) + \left( \frac{D_{a_2} \nabla^2 n_{2+} - D_{a_1} \nabla^2 n_{1+}}{n_{1+}} \right) \right\} + k_{12} n_2 (1 + R). \quad (5.119a)$$

В пределе, при малых значениях  $R$ , первое слагаемое мало, поэтому

$$\frac{dR}{dt} = k_{12} n_2. \quad (5.119б)$$

Типичный вид функции  $R(t)$  представлен на рис. 20.

Условия, обеспечивающие малые значения  $R$ , выполняются во многих случаях распада плазмы.

## ФОТОВОЗБУЖДЕНИЕ И ФОТОИОНИЗАЦИЯ

## § 1. СЕЧЕНИЕ ФОТОВОЗБУЖДЕНИЯ И ФОТОИОНИЗАЦИИ АТОМОВ

При поглощении излучения, сопровождаемого переходом («резонансное поглощение»), максимальное значение эффективного сечения поглощения дается выражением

$$\sigma_{\text{макс}} = \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{1/2} \frac{\pi e^2 \lambda_0 f}{m_e c}. \quad (6.1)$$

Если энергия фотона достаточно велика, атом или ион могут ионизоваться. Закон сохранения энергии в этом процессе приводит к следующему соотношению (рис. 21):

$$h\nu = \frac{m_0 v^2}{2} + \epsilon_{\text{ион}, z-1} - \epsilon_i = \frac{m_0 v^2}{2} + h\nu_i, \quad (6.2)$$

здесь  $v$  — скорость свободного электрона;  $\epsilon_i$  — энергия уровня, на котором находится атом или ион перед поглощением;  $\nu_i$  — нижняя граница для частоты света, при которой может произойти фотопоглощение с уровня  $i$ . Атомное эффективное сечение рассматриваемого процесса есть сечение фотоионизации  $\sigma_{\text{ион}}(\nu)$ . Оно зависит от частоты и обращается в нуль, если  $\nu < \nu_i$ .

Согласно полуклассической теории сечение фотоионизации для водородоподобных систем ( $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{++}$  и т. д.) имеет вид

$$\sigma_n^{\text{кл}}(\nu) = C_1 \frac{z^4}{\nu^3 n^5}, \quad (6.3)$$

где  $n$  — главное квантовое число;  $z$  — число валентных электронов, которые «видит» излучающий электрон ( $\text{H}$ ,  $z=1$ ;  $\text{He}^+$ ,  $z=2$  и т. п.). Постоянная  $C_1$  равна

$$C_1 = \frac{64\pi^4 e^2 m_e^{10}}{3\sqrt{3} c h^5} = 2,815 \cdot 10^{29} \text{ ед. СГС.}$$

Квантово-механический расчет приводит к следующему выражению для сечения фотоионизации:

$$\sigma_{z-1, i}(\nu) = \frac{32\pi^4 e^2 m_e}{3h^3 c g_{z-1, i}} \nu \sum_{lm} \left| \int \psi_{i, m} \sum_{l' m'} m' m \psi_{de, l' m'} d\epsilon_j q_j \pi \right|^2, \quad (6.4)$$

где  $m$  и  $m'$  — магнитные квантовые числа для нейтрального атома  $z=1$ . Волновая функция  $\psi_{i, m'}$  описывает атом или ион в основном состоянии. Расчет матричных элементов в (6.4) представляет большие трудности. Число точных расчетов сечений фотоионизации (методом Хартри-Фока) мал. Выполненные расчеты показывают, что формула (6.4) дает значение

$\sigma(\nu)$ , мало отличающееся от величины, определяемой по формуле (6.3). Следуя Гаунту, точный результат можно представить с помощью полуклассической формулы (6.3) и поправочного множителя — фактора Гаунта  $G_n(\nu)$ :

$$\sigma_{z-1,n}(\nu) = \sigma_n^{\text{кл}}(\nu) G_n(\nu). \quad (6.5)$$

Фактор Гаунта рассчитан для водородоподобных ионов для разных частот. Можно получить факторы Гаунта для отдельных уровней других атомов и ионов, когда имеет место соотношение, подобное (6.5):

$$\sigma_{z-1,i}(\nu) = \sigma_n^{\text{кл}}(\nu) G_i(\nu). \quad (6.6)$$

Даже для сложных атомов фактор Гаунта оказывается порядка единицы.

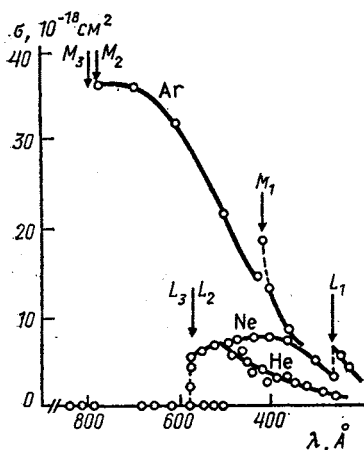


Рис. 22. Сечения фотоионизации для инертных газов ( $L_1, \dots, M_3$  — уровни, из которых удаляются электроны)

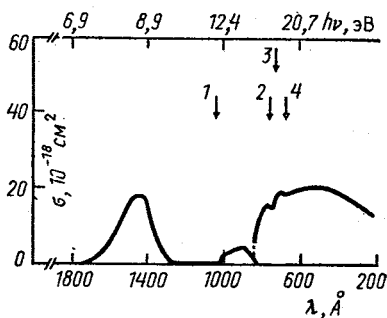


Рис. 23. Сечения фотопоглощения для кислорода: вертикальные стрелки показывают значения потенциалов ионизации

На рис. 22 представлены эффективные сечения (функции) фотоионизации инертных газов. Вблизи порога ионизации сечения максимальны и являются функцией атомного номера и числа электронов во внешней оболочке. С ростом энергии фотона сечения медленно падают пропорционально  $\nu^{-3}$ .

Для многоэлектронных систем формула (6.4) неточна и обычно заменяется приближением центрального поля, в котором молекулярные волновые функции берутся в виде линейных комбинаций определителей, составленных из одноэлектронных волновых функций свободных атомов. Эффективное сечение в этом случае записывается в виде

$$\sigma = AF' \left\{ C_{l-1} \left| \int_0^{\infty} f_p(n, l)(r) f_q(\epsilon_e, l-1)(r) r^3 dr \right|^2 + \right. \\ \left. + C_{l+1} \left| \int_0^{\infty} f_p(n, l)(r) f_q(\epsilon_e, l+1)(r) r^3 dr \right|^2 \right\}. \quad (6.7)$$

Здесь все  $f_p$  и  $f_q$  — радиальные волновые функции для главного и азимутального квантовых чисел  $n$  и  $l$  ( $p$  — начальное, а  $q$  — конечное состояния). Все  $C$  — численные коэффициенты, табулированные в работах Бейтса и Ситона;  $A$  — нормирующий множитель. Поправочный множитель  $F'$  — аппроксимируется произведением по всем электронам, не принимающим участие в переходе

$$F' = \Pi \left| \int_0^{\infty} f_p(n, l)(r) f_q(n, l)(r) r^2 dr \right|. \quad (6.8)$$

К сожалению, из-за отсутствия точных данных о ходе кривой потенциальной энергии вблизи ядра очень трудно получить точные радиальные функции уравнения Шредингера. Тем не менее Ситоном была получена аналитическая форма решения, выраженного через отрицательные собственные значения  $\epsilon_e$ , которые связаны с квантовыми дефектами. В этом случае собственные функции свободных состояний определялись с помощью квантовых дефектов серий термов. Для связанного состояния использовались водородные собственные функции.

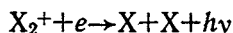
Метод квантового дефекта успешно применен Берджессом и Ситоном к He, Li, C, N, O, Na, Mg, K, O<sup>+</sup>, Ne<sup>+</sup>, Na<sup>+</sup>, Mg<sup>+</sup>, Si<sup>+</sup> и Ca<sup>+</sup>.

## § 2. СЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ИОННОЙ РЕКОМБИНАЦИИ

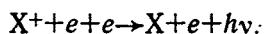
Зная сечение фотоионизации, можно также определить и сечение  $\sigma_{\text{рек}}$  обратного процесса



которое нельзя практически измерить из-за малой интенсивности излучения в сплошном спектре. С другой стороны, прямому определению сечения этого процесса мешают происходящие с большой вероятностью конкурирующие процессы, такие, как диссоциативная рекомбинация с излучением



и ударная рекомбинация с излучением



Поэтому для определения сечения рекомбинации  $\sigma_{\text{рек}}$  обычно

пользуются соотношением, вытекающим из принципа детального равновесия:

$$\frac{\sigma_{\text{рек}}}{\sigma_{\text{фотоион}}} = \frac{g_0 e}{2g_1 m_e c^2} \frac{\epsilon_{\text{ф}}^2}{\epsilon_e}, \quad (6.10)$$

где  $g_0$  и  $g_1$  — статистические веса атома и иона;  $\epsilon_{\text{ф}}$  и  $\epsilon_e$  — кинетические энергии фотона и электрона. Спин свободного электрона учтен коэффициентом 2.

### § 3. ФОТОПОГЛОЩЕНИЕ МОЛЕКУЛ

Рассмотрим теперь фотопоглощение для ряда важных молекулярных газов  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{H}_2$ . Данные для кислорода приведены на рис. 23. Примерно с  $1750 \text{ \AA}$  начинается диссоциационный континуум, примыкающий к полосам Шумана—Рунге. Второй континуум находится у ионизационной границы  $1040 \text{ \AA}$ . Наблюдается также третий континуум, который начинается с  $763 \text{ \AA}$  и обусловлен, вероятно, наложением трех ионизационных процессов наряду с диссоциацией.

У азота в области длин волн, превышающих границу фотоионизационного континуума, который начинается ниже  $800 \text{ \AA}$ , наблюдались две ридберговские серии полос.

У водорода фотоионизационный континуум трудно идентифицировать из-за перекрытия полос и диссоциационного континуума, лежащего в области более коротких волн.

Следует указать на некоторые интересные особенности спектра поглощения молекул вблизи порога диссоциации. Первое из них — это явление преддиссоциации, которое обычно объясняется псевдопересечением потенциальных кривых. В некоторых спектрах поглощения высокие колебательные полосы отсутствуют либо имеют размытую вращательную тонкую структуру. Молекулы, попадающие в эту область при возбуждении, нестабильны, и часть из них может переходить в не-

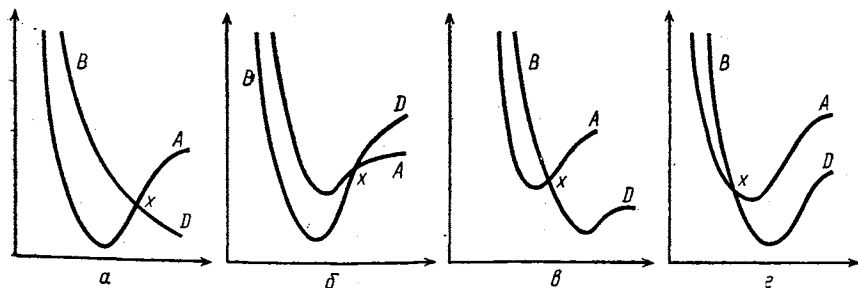


Рис. 24. Кривые потенциальной энергии молекулы в состоянии  $A$  и в различных типах возбужденного состояния  $B$ :  $D$  — преддиссоциация,  $X$  — точка псевдопересечения потенциальных кривых



стабильные или стабильные состояния с последующей диссоциацией. Таким образом, диссоциация может происходить при энергии, меньшей, чем диссоциационный предел (рис. 24).

#### § 4. МНОГОКВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Процессы, в которых атомом или молекулой одновременно поглощаются или испускаются два или более квантов света, называются многоквантовыми. Эти процессы подчиняются другим правилам отбора, нежели одноквантовые процессы. Так как вероятность даже двухквантовых процессов на много порядков меньше вероятности одноквантовых процессов, многоквантовые процессы можно наблюдать только при поглощении излучения очень высокой интенсивности, какое можно получить, например, в сверхмощных лазерных пучках.

Эффективное сечение фотопоглощения в двухквантовом процессе дается формулой

$$\sigma = \left( \frac{e}{m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{\lambda_r^2}{\epsilon^2 \Delta\nu} \right) F. \quad (6.11)$$

Здесь  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость вещества;  $F$  — интенсивность падающего светового потока;  $\Delta\nu$  — ширина полосы поглощения около частоты  $2\nu$ ;  $\lambda_r$  — длина волны падающего света.

Таким образом, число случаев возбуждения пропорционально квадрату интенсивности излучения. Вероятность процесса максимальна, когда энергия перехода наиболее близка к  $2h\nu$  в двухквантовых и к  $nh\nu$  в многоквантовых процессах.

### Глава 7

## ЭЛЕКТРОННО-ИОННАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ

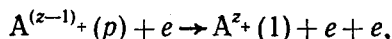
### Общие понятия

Рекомбинация и ионизация в плазме являются результатом многих столкновительных и излучательных процессов, а также процессов переноса. Однако в оптически тонкой квазистационарной плазме можно пренебречь процессами переноса и описать коэффициенты скоростей рекомбинации и ионизации как функции двух параметров: электронной плотности  $n(c)$  ( $c = \text{continuum}$ , или свободные электроны) и электронной температуры  $T_e$ . В случае, когда плотность нейтральных частиц (атомов) сопоставима с плотностью электронов, необходимо учитывать влияние на электронные процессы в плазме столкновений с нейтральными частицами. Для вычисления коэффициентов скоростей рекомбинации и ионизации в плазме обыч-

но используется система сцепленных кинетических уравнений, учитывающих все возможные столкновительные и излучательные процессы при определенных заданных параметрах плазмы. Рассмотрим вначале каждый возможный процесс в отдельности.

### § 1. ОСНОВНЫЕ СТОЛКНОВИТЕЛЬНО-ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

1. Ионизация частиц вида  $A^{(z-1)+}(p)$  при столкновении с электронами:



где  $p \gg 1$ .

Скорость такого процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = -K^{(e)}(p, c)n(p)n(c), \quad (7.1)$$

где  $n(p)$  — концентрация ионов на уровне  $p$ ;  $n(c)$  — концентрация электронов.

Коэффициент скорости любого элементарного процесса при максвелловском распределении сталкивающихся частиц по скоростям равен

$$K \equiv \langle v \rangle \int_0^{\infty} \sigma_p(v) e^{-\frac{v}{kT}} \frac{v}{kT} d\left(\frac{v}{kT}\right), \quad (7.2)$$

где  $\langle v \rangle$  — средняя относительная скорость частиц. Поперечное сечение ионизации электронами  $p$ -го уровня

$$\sigma_p^{(e)} = 4\pi a_0^2 \left(\frac{\epsilon_1^H}{\epsilon_p}\right)^2 f_p \xi_p \frac{U_p - 1}{U_p^2} \ln(1, 25\beta_p U_p). \quad (7.3)$$

Здесь

$$U_p = \epsilon^{(e)}/\epsilon_p, \quad \epsilon^{(e)} = m_e v_e^2/2, \quad \epsilon_p = z^2 \epsilon_1^H/p^2;$$

$$\beta_p = 1 + \frac{z-1}{z+1}, \quad \epsilon_1^H = 13,59 \text{ эВ}; \quad (7.3a)$$

$\xi_p$  — число эквивалентных электронов на уровне  $p$ , подлежащих ионизации (для H:  $\xi_p=1$ );  $f_p$  — сила осциллятора для процесса ионизации с уровня  $p$ , в расчете на 1 электрон ( $f_1=0,66$ ;  $f_2=0,71$ ;  $f_3=0,81$ ;  $f_4=0,94$ ;  $f_{p>5}=1$ );  $\epsilon_p$  — энергия ионизации с  $p$ -го уровня.

После интегрирования уравнения (7.1), при максвелловском распределении частиц по скоростям, можно получить следующее выражение для коэффициента скорости ионизации частиц при столкновении с электронами:

$$K^{(e)}(p, c) \equiv \sigma_p^{(e)} \langle v_e \rangle = 4\pi a_0^2 \left(\frac{\epsilon_1^H}{\epsilon_p}\right)^2 f_p \xi_p \left(\frac{8kT_e}{\pi m_e}\right)^{1/2} u_p \Psi_1(u_p, \beta_p), \quad (7.4)$$

где

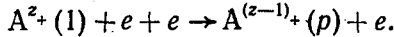
$$u_p = \varepsilon_p / kT_e,$$

а

$$\Psi_1(\beta, x) = \int_{u=x}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{x}{u} \right) e^{-u} \ln(1,25\beta u/x) \right] du \quad (7.4a)$$

( $\Psi_1(\beta, x)$  — квантово-механическая поправка для атомов).

2. Рекомбинация ионов при тройном столкновении с электронами:



Скорость процесса равна

$$\frac{dn(p)}{t} = K^{(e)}(c, p) n_z(1) [n(c)]^2, \quad (7.5)$$

где

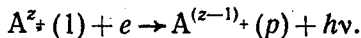
$$n_z(1) = n [A^{z+}(1)].$$

В соответствии с принципом детального равновесия коэффициент скорости тройной столкновительной электронной рекомбинации частицы на уровень  $p$  представим в виде

$$K^{(e)}(c, p) = \frac{g_p}{2g_z} \frac{h^3}{(2\pi m_e kT_e)^{3/2}} K^{(e)}(p, c) e^{u_p}. \quad (7.6)$$

Здесь  $g_p$  — статистический вес уровня  $p$  (для водорода и водородоподобных ионов  $g_p = 2p^2$ );  $g_z$  — статистический вес основного состояния иона  $A^{z+}(1)$  (для протонов  $g_z = 1$ ); 2 — статистический вес электрона ( $+1/2$  и  $-1/2$ );  $Q_e = (2\pi m_e kT_e)^{3/2} / h^3$  — статистическая сумма поступательного движения электронов.

3. Излучательная рекомбинация ионов:



Скорость процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = \beta(c, p) n_z(1) n(c). \quad (7.7)$$

Коэффициент скорости излучательной рекомбинации равен

$$\beta(c, p) = 5,20 \cdot 10^{-14} z_1^{3/2} G_p p^{-3} [-E_i(u_p)] e^{u_p}. \quad (7.8)$$

Здесь  $G_p$  — эффективный фактор Гаунта ( $G_1 = 0,8$ ;  $G_{p>1} = 1,0$ );  $-E_i(-x)$  — интегральная показательная функция:

$$-E_i(-x) \equiv \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x}, & x > 5, \\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) - C, & x < 0,2, \end{cases} \quad (7.9)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера:

$$C = \lim \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \right) - \ln n \right].$$

4. Фотоионизация частиц с уровня  $p$ :

$$A^{(z-1)+}(p) + h\nu \rightarrow A^{z+}(1) + e.$$

Скорость процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = -\beta(p, c) n(p) \rho_\nu. \quad (7.10)$$

Коэффициент скорости фотоионизации зависит от поля излучения  $\rho_\nu$  для частот выше ионизационного предела  $\nu_i$ . Согласно Элверту вероятностный коэффициент ионизации

$$\beta(1, c) = V \frac{16f_1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_0}{\alpha^3 c^2} \frac{\xi_n n \nu_n^3}{z_{эф}^2} [-E_i(u_n)] h_1, \quad (7.11)$$

здесь  $\sigma_0$  — сечение рассеяния электронов по Томсону:

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2, \quad (7.12)$$

$u_n = z^2 \epsilon_1 H / n^2 kT$ ;  $\alpha = 1/137$  — постоянная тонкой структуры Зоммерфельда;  $h_1$  — множитель, учитывающий ионизацию возбужденных уровней наряду с основным состоянием ( $h_1 > 1$ ). В свою очередь  $f_1$  — множитель, учитывающий неточность использованной при выводе уравнения (7.11) формулы Крамерса

$$\kappa_n = \frac{65\pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{z^4 m e^{10}}{ch^6} \frac{1}{n^5 \nu^3} \quad (7.13)$$

для коэффициента поглощения  $\kappa$ , а  $V$  — поправка на заполнение полости газом в формуле Планка для плотности излучения:

$$\rho_\nu = V \frac{8\pi h \nu^3}{c^3 (e^{h\nu/kT} - 1)}. \quad (7.11a)$$

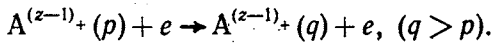
Чтобы избежать вычисления  $\rho_\nu$  из уравнений радиационного переноса, фотоионизацию представляют в виде отрицательной спонтанной рекомбинации, скорость которой будет равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = -\beta(c, p) n_z(1) n(c) (1 - \lambda_p). \quad (7.10a)$$

Величина  $\mu = 1 - \lambda_p$  является множителем, учитывающим поглощение фотонов частицами на уровне  $p$ . При  $\mu_p = 0$  ( $\lambda_p = 1$ ) плазма разрежена и фотоионизация отсутствует, при  $\mu_p = 1$  ( $\lambda_p = 0$ ) плазма непрозрачна (оптически толстая) и скорость излуча-

тельной рекомбинации сбалансирована скоростью фотоионизации.

5. Электронное возбуждение частиц с уровня  $p$ :



Скорость процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = -K^{(e)}(p, q) n(p) n(e). \quad (7.14)$$

Поперечное сечение процесса запишем в виде

$$\sigma_{p,q}^{(e)} = 4\pi a_0^2 \left( \frac{\varepsilon_1^H}{\varepsilon_q - \varepsilon_p} \right)^2 f_{p,q} g(U_{p,q}), \quad (7.15)$$

где

$$U_{p,q} = \varepsilon^{(e)} / (\varepsilon_q - \varepsilon_p), \quad (7.15a)$$

$$g(U_{p,q}) = \frac{U_{p,q} - 1}{U_{p,q}^2} \ln(1,25\beta_{p,q} U_{p,q})$$

для атомов ( $z=1$ ),

$$g(U_{p,q}) = \begin{cases} 0,302 \text{ для } 1 \leq U_{p,q} \leq 3,85, \\ \frac{U_{p,q} - 1}{U_{p,q}^2} \ln(1,25\beta_{p,q} U_{p,q}) \text{ для } U_{p,q} > 3,85 \end{cases} \quad (7.15b)$$

для ионов ( $z > 1$ ).

Обычно принимают  $\beta_{p,q} \approx 2$  для атомов и  $\beta_{p,q} = 1$  для ионов. Если распределение частиц по скоростям максвелловское, то после интегрирования уравнения (7.14) получают следующее выражение для коэффициента скорости электронного возбуждения:

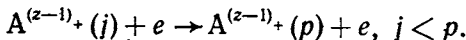
$$K^{(e)}(p, q) \equiv \sigma_{p,q}^{(e)} \langle v_e \rangle_{p>q} = 8,69 \cdot 10^{-8} f_{p,q} z^{-3} \frac{u_1^{3/2}}{u_{p,q}} \begin{cases} \Psi_1^{\beta}(\beta_{p,q}, u_{p,q}), \text{ для атомов} \\ \Psi_2(\beta_{p,q}, u_{p,q}), \text{ для ионов,} \end{cases} \quad (7.16)$$

где

$$u_1 = \frac{z^2 \varepsilon_1^H}{kT_e} \quad \text{и} \quad u_{p,q} = \frac{\varepsilon_q - \varepsilon_p}{kT_e}.$$

Выражения для  $\Psi_1(\beta, x)$  и  $\Psi_2(\beta, x)$  даны в работах Дравина.

5(а). Электронное возбуждение частиц с более низких уровней на уровень  $p$ :

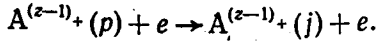


Скорость такого процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = K^{(e)}(j, p) n(j) n(c).$$

Выражение для  $K^{(e)}(j, p)$  дано уравнением (7.16).

6. Электронное девозбуждение частиц с уровня  $p$ :



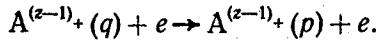
Скорость процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = -K^{(e)}(p, j) n(p) n(c). \quad (7.17)$$

Согласно принципу детального равновесия коэффициент скорости электронного девозбуждения частиц с уровня  $p$  равен

$$K^{(e)}(p, j) = \frac{g_j}{g_p} K^{(e)}(j, p) e^{u_{p,j}}. \quad (7.18)$$

6(а). Электронное девозбуждение частиц с более высоких уровней на уровень  $p$ :

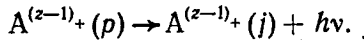


Скорость этого процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = K^{(e)}(q, p) n(q) n(c).$$

Выражение для  $K^{(e)}(q, p)$  дано уравнением (7.18).

7. Спонтанное девозбуждение частиц с уровня  $p$ :



Скорость процесса равна

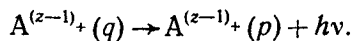
$$\frac{dn(p)}{dt} = -A(p, j) n(p). \quad (7.19)$$

Коэффициенты скорости спонтанного девозбуждения частиц с излучением, или, иначе, вероятности спонтанных электронных переходов  $A(p, j)$ , равны

$$A(p, j) = 6.67 \cdot 10^{-1} \frac{g_j}{g_p \lambda^3} f_{i,p}. \quad (7.20)$$

Силы осциллятора при поглощении  $f_{i,p}$  определены для атомных и ионных линий многих элементов.

7(а). Спонтанное девозбуждение частиц с более высоких уровней на уровень  $p$ :

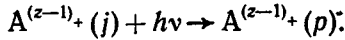


Скорость такого процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = A(q, p) n(q).$$

Выражение для  $A(q, p)$  дано уравнением (7.20).

8. Фотовозбуждение частиц на уровень  $p$ :



Скорость процесса равна

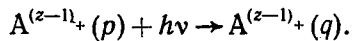
$$\frac{dn(p)}{dt} = B(j, p) \rho_\nu. \quad (7.21)$$

Коэффициенты скорости возбуждения частиц при поглощении излучения зависят от плотности излучения. Однако в данном случае, как и при фотоионизации, влияние поля излучения можно заменить коэффициентом реабсорбции  $(1 - \lambda_{p,j})$ . Благодаря этому скорость возбуждения частиц при поглощении излучения можно представить как

$$\frac{dn(p)}{dt} = A(p, j) n(p) (1 - \lambda_{p,j}). \quad (7.21a)$$

Линия может быть оптически толстой, если  $\lambda_{p,j} < 1$ , и оптически тонкой, если  $\lambda_{p,j} = 1$ .

8(a). Фотовозбуждение частиц с уровня  $p$  на более высокие уровни:



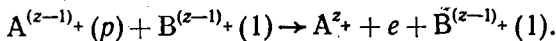
Скорость этого процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = -A(q, p) n(q) (1 - \lambda_{q,p}).$$

Выражение для  $A(q, p)$  дано уравнением (7.21a).

## § 2. СТОЛКНОВЕНИЯ ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ С ТЯЖЕЛЫМИ ЧАСТИЦАМИ ВИДА $B^{(z-1)+}(1)$ , НАПРИМЕР С АТОМАМИ ВОДОРОДА

1. Ионизация частиц вида  $A^{(z-1)+}(p)$ :



Скорость процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = -K^{(a)}(p, c) n(p) n_{z-1}(1). \quad (7.22)$$

Поперечное сечение процесса равно

$$\sigma_p^{(a)} = 4\pi a_0^2 \left( \frac{\varepsilon_1^H}{\varepsilon_p} \right)^2 \frac{m_a}{m_H^2} f_p \xi_p \frac{2m_e}{m_a + m_e} \frac{W_p - 1}{\left[ 1 + \frac{2m_e}{m_a + m_e} (W_p - 1) \right]^2}, \quad (7.23)$$

где  $m_a$  — масса ударяющей частицы вида  $B^{(z-1)+}(1)$ ;  $W_p$  — приведенная поступательная энергия сталкивающихся частиц

$$W_p = \frac{\varepsilon^{(a)} - \varepsilon_p}{\varepsilon_p}$$

и

$$\varepsilon_a = \frac{m_a v_a^2}{2}. \quad (7.23a)$$

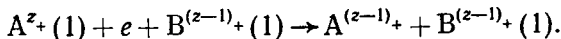
Интегрирование уравнения (7.22), при максвелловском распределении тяжелых частиц, дает выражение для коэффициента скорости ионизации при столкновении с тяжелыми частицами (например, атомами водорода) в системе центра масс:

$$K^{(a)}(p, c) = \sigma_p^{(a)} \langle v_a \rangle = 32\pi a_0^2 \left( \frac{\varepsilon_1^H}{\varepsilon_p} \right)^2 f_p \xi_p \times \\ \times \left( \frac{kT_a}{\pi m_a} \right)^{1/2} \frac{m_e m_a}{m_H (m_a + m_e)} \Psi_{m_a}(\omega_p), \quad (7.24)$$

где  $T_a$  — температура тяжелых частиц;  $\omega_p = \frac{\varepsilon_p}{kT_a} = \frac{z^2 \varepsilon_1^H}{kT_a p^2}$  и

$$\Psi_{m_a}(x) \simeq \left( 1 + \frac{2}{x} \right) \left\{ \frac{1}{1 + \left[ \frac{2m_e}{(m_a + m_e)x} \right]^2} \right\} e^{-x}. \quad (7.24a)$$

2. Рекомбинация ионов при тройном столкновении их с электронами и тяжелыми частицами:



Скорость процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = K^{(a)}(c, p) n_z(1) n_{z-1}(1) n(c). \quad (7.25)$$

Коэффициент скорости рекомбинации ионов при тройном столкновении с тяжелыми частицами, например с атомами водорода, равен

$$K^{(a)}(c, p) = \frac{g_p}{2g_z} \left( \frac{m_a + m_e}{m_a m_e} \right)^{3/2} \frac{n^3}{(2\pi k)^{3/2}} \times \\ \times \frac{K^{(a)}(p, c)}{T_a^{1/2} T_e} \exp(-u_p + 2u_p^{1/2} \omega_p^{1/2}). \quad (7.26)$$



Так как  $K^{(a)}(p, c)$  пропорционален  $e^{-\omega p}$ , то при  $T_a = T_e$  общий экспоненциальный множитель в  $K^{(a)}(c, p)$  равен

$$\exp(-\omega_p - u_p + 2u_p^{1/2} \omega_p^{1/2}) = 1.$$

3. Возбуждение частиц с уровня  $p$ :

$$A^{(z-1)+}(p) + B^{(z-1)+}(1) \rightarrow A^{(z-1)+}(q) + B^{(z-1)+}(1).$$

Скорость процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = -K^{(a)}(p, q) n(p) n_{z-1}(1). \quad (7.27)$$

По аналогии с уравнением (7.23) для ионизации поперечное сечение процесса возбуждения равно

$$\begin{aligned} \sigma_{p,q}^{(a)} = & 4\pi a_0^2 \left( \frac{\varepsilon_1^H}{\varepsilon_q - \varepsilon_p} \right)^2 f_{p,q} \frac{2m_a m_e}{(m_a + m_e) m_H} \times \\ & \times \frac{W_{p,q} - 1}{\left[ 1 + \frac{2m_a}{m_a + m_e} (W_{p,q} - 1) \right]^2}, \end{aligned} \quad (7.28)$$

где

$$W_{p,q} = \frac{\varepsilon^{(a)} - |\varepsilon_p - \varepsilon_q|}{|\varepsilon_p - \varepsilon_q|}. \quad (7.28a)$$

Интегрируя уравнения (7.27), получим при максвелловском распределении частиц по скоростям выражение для коэффициента скорости возбуждения частиц с уровня  $p$  при столкновении с тяжелыми частицами:

$$\begin{aligned} K^{(a)}(p, q) = & \sigma_{p,q}^{(a)} \langle v_a \rangle = \\ = & 32\pi a_0^2 \left( \frac{\varepsilon_1^H}{\varepsilon_{p,q}} \right) f_{p,q} \left( \frac{kT_a}{\pi m_a} \right)^{1/2} \frac{m_a m_e}{m_H (m_a + m_e)} \Psi_{m_a}(\omega_{p,q}), \end{aligned} \quad (7.29)$$

где  $\omega_{p,q} = \frac{|\varepsilon_p - \varepsilon_q|}{kT_a}$ , а вид функции  $\Psi_{m_a}(x)$  дан в уравнении (7.24a).

3(а). Возбуждение частиц с более низких уровней на уровень  $p$ :

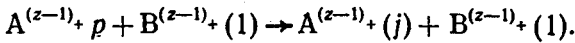
$$A^{(z-1)+}(j) + B^{(z-1)+}(1) \rightarrow A^{(z-1)+}(p) + B^{(z-1)+}(1).$$

Скорость такого процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = K^{(a)}(j, p) n(j) n_{z-1}(1).$$

Выражение для  $K^{(a)}(j, p)$  дано уравнением (7.29).

#### 4. Девозбуждение частиц с уровня $p$ :



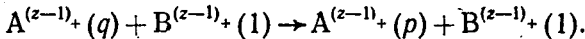
Скорость процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = -K^{(a)}(p, j) n(p) n_{z-1}(1). \quad (7.30)$$

Коэффициент скорости девозбуждения частиц с уровня  $p$  при столкновении с тяжелыми частицами равен

$$K^{(a)}(p, j) = \sigma_{p,j}^{(a)} \langle v_a \rangle = \frac{g_j}{g_p} K^{(a)}(j, p) e^{-w_{j,p}}. \quad (7.31)$$

4(а). Девозбуждение частиц с более высоких уровней на уровень  $p$ :



Скорость этого процесса равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = K^{(a)}(q, p) n(q) n_{z-1}(1).$$

Выражение для  $K^{(a)}(q, p)$  дано уравнением (7.31).

### § 3. ПРОЦЕССЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ЗАСЕЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УРОВНЕЙ В ПЛАЗМЕ

Рассмотрим в качестве примера схему энергетических уровней атомов водорода (рис. 25), на которой сплошными стрелками изображены процессы, уменьшающие населенность  $p$ -го уровня, а пунктирными — увеличивающие ее.

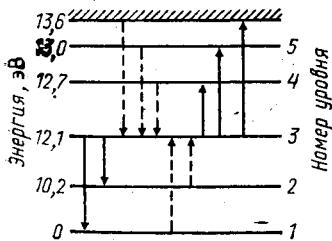


Рис. 25. Схема энергетических уровней атома водорода

Итак,  $p$ -й уровень заселяется за счет следующих процессов.

1. Электронное возбуждение с более низких уровней:

$$n(c) \sum_{j=1}^{p-1} K^{(e)}(j, p) n(j).$$

2. Электронное девозбуждение с более высоких уровней:

$$n(c) \sum_{q=p+1}^{p^*} K^{(e)}(q, p) n(q),$$

здесь  $p^*$  — номер наиболее высокого, еще связанного уровня:

$$p^* = \left( \frac{z^2 \langle d_+ \rangle}{a_0} \right)^{1/2} = 1,08 \cdot 10^4 z n_z^{-1/6}, \quad (7.32)$$

а  $\langle d_+ \rangle$  — среднее расстояние между заряженными частицами.

3. Возбуждение частиц  $A^{(z-1)+}(j)$  с более низких уровней тяжелыми частицами  $B^{(z-1)+}(1)$ :

$$n(1) \sum_{j=1}^{p-1} K^{(a)}(j, p) n(j).$$

4. Девозбуждение частиц  $A^{(z-1)}(q)$  с более высоких уровней тяжелыми частицами:

$$n(1) \sum_{q=p+1}^{p^*} K^{(a)}(q, p) n(q).$$

5. Фотовозбуждение частиц  $A^{(z-1)+}(j)$  с более низких уровней:

$$n(p) \sum_{i=1}^{p-1} A(p, j) (1 - \lambda_{p,i}).$$

6. Спонтанное девозбуждение частиц  $A^{(z-1)+}(q)$  с более высоких уровней:

$$\sum_{q=p+1}^{p^*} A(q, p) n(q).$$

7. Излучательная рекомбинация ионов:

$$n_z(1) n(c) \beta(c, p).$$

8. Рекомбинация ионов при тройном столкновении с электронами:

$$n_z(1) [n(c)]^2 K^{(e)}(c, p).$$

9. Рекомбинация ионов при тройном столкновении с тяжелыми частицами:

$$n_z(1) n(1) n(c) K^{(a)}(c, p).$$

Уменьшение населенности  $p$ -го уровня обусловлено следующими процессами.

1. Электронное возбуждение на более высокие уровни:

$$- n(p) n(c) \sum_{q=p+1}^{p^*} K^{(e)}(p, q).$$

2. Электронное девозбуждение на более низкие уровни:

$$- n(p) n(c) \sum_{j=1}^{p-1} K^{(e)}(p, j).$$

3. Возбуждение тяжелыми частицами на более высокие уровни:

$$-n(p)n(1) \sum_{q=p+1}^{p^*} K^{(a)}(p, q).$$

4. Девозбуждение тяжелыми частицами на более низкие уровни:

$$-n(p)n(1) \sum_{j=1}^{p-1} K^{(a)}(p, j).$$

5. Фотовозбуждение на более высокие уровни:

$$-\sum_{q=p+1}^{p^*} A(q, p)n(q)(1-\lambda_{q,p}).$$

6. Спонтанное девозбуждение на более низкие уровни:

$$-n(p) \sum_{j=1}^{p-1} A(p, j).$$

7. Ионизация при столкновении с электронами:

$$-n(p)n(c)K^{(e)}(p, c).$$

8. Ионизация при столкновении с тяжелыми частицами:

$$-n(p)n(1)K^{(a)}(p, c).$$

9. Фотоионизация:

$$-n_z(1)n(c)\beta(c, p)(1-\lambda_p).$$

#### § 4. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КИНЕТИКИ ЭЛЕКТРОННО-ИОННОЙ РЕКОМБИНАЦИИ В ОДНОРОДНОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМЕ

В однородной квазистационарной плазме скорость изменения плотности частиц  $A^{(z-1)+}(p)$  равна

$$\begin{aligned} \frac{dn(p)}{dt} = & \left[ \left( \sum_{j=1}^{p-1} K^{(e)}(j, p)n(j) + \sum_{q=p+1}^{p^*} K^{(e)}(q, p)n(q) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left\{ \sum_{j=1}^{p-1} K^{(e)}(p, j) + \sum_{q=p+1}^{p^*} K^{(e)}(p, q) + K^{(e)}(p, c) \right\} n(p) \right) n(c) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{p-1} A(p, j)\lambda_{p,j}n(p) + \sum_{q=p+1}^{p^*} A(q, p)\lambda_{q,p}n(q) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \sum_{j=1}^{p-1} K^{(\alpha)}(j, p) n(j) + \sum_{q=p+1}^{p^*} K^{(\alpha)}(q, p) n(q) - \right. \\
& - \left. \left\{ \sum_{j=1}^{p-1} K^{(a)}(p, j) + \sum_{q=p+1}^{p^*} K^{(a)}(p, q) + K^{(a)}(p, c) \right\} n(p) \right] n(1) + \\
& + \{ [\beta(c, p) \lambda_p + K^{(e)}(c, p) n(c)] n_z(1) n(c) \} + \\
& + [K^{(a)}(c, p) n_z(1) n(c)] n(1). \quad (7.33)
\end{aligned}$$

В этом уравнении первая пара квадратных скобок включает процессы электронного и фотовозбуждения и девозбуждения частиц на уровень  $p$  и с уровня  $p$ , а также процессы ионизации при столкновении с электронами.

Вторая пара квадратных скобок относится к аналогичным процессам, наблюдающимся в плазме при столкновении с тяжелыми частицами, особенно если их плотность значительно (на четыре порядка и более) превышает плотность электронов.

В третьей паре квадратных скобок рассматриваются процессы фотоионизации, излучательной и столкновительной рекомбинации ионов.

Последняя пара квадратных скобок дает представление о процессах рекомбинации ионов в присутствии тяжелых частиц.

Кинетическое уравнение (7.33) можно представить в более простом виде

$$\frac{dn(p)}{dt} = \sum_{i=1}^{p^*} \{ c_{p,i} + c'_{p,i} n(1) \} n(i) + \alpha_p + \alpha'_p n(1). \quad (7.34)$$

Здесь  $\alpha_p$  и  $\alpha'_p n(1)$  — скорости столкновительно-излучательной рекомбинации на уровень  $p$ ;  $c_{p,i} n(i)$  и  $c'_{p,i} n(1) n(i)$  — скорости столкновительно-излучательной ионизации и возбуждения частиц:

$$\alpha_p = \{ \beta(c, p) \lambda_p + K^{(e)}(c, p) n(c) \} n_z(1) n(c),$$

$$\alpha'_p = K^{(a)}(c, p) n_z(1) n(c),$$

$$c_{p,i} n(i) = \{ K^{(e)}(j, p) n(j) - K^{(e)}(p, j) n(p) \} n(c) - A(p, j) \lambda_{p,j} n(p),$$

$$i = j < p$$

$$c_{p,i} n(i) = \{ K^{(e)}(q, p) n(q) - K^{(e)}(p, q) n(p) -$$

$$i = q > p$$

$$- K^{(e)}(p, c) n(p) \} n(c) + A(q, p) \lambda_{q,p} n(q), \quad (7.35)$$

$$c_{p,i}n(i) = K^{(a)}(j, p)n(j) - K^{(a)}(p, j)n(p),$$

$$i = j < p$$

$$c_{p,j}n(i) = K^{(a)}(q, p)n(q) - \{K^{(a)}(p, q) + K^{(a)}(p, c)\}n(p).$$

$$i = q < p$$

Нелинейные члены в уравнении (7.34) оказывают влияние лишь тогда, когда плотность частиц  $B^{(z-1)+}(1)$  в основном состоянии высока. В этом случае уравнение (7.34) столкновительно-излучательной рекомбинации решается в два этапа: сначала для линейной системы, когда плотность  $n(1)$  мала, после чего полученные величины корректируются благодаря наличию нелинейных членов.

Значение  $n(p)$  можно представить в виде

$$n(p) = n(1) + n(p). \quad (7.36)$$

$$p \geq 1 \quad p > 1$$

Когда возбужденные состояния ( $p > 1$ ) отделены от основного ( $p=1$ ) достаточно большей энергией, так что

$$\varepsilon_{i>1} - \varepsilon_{p=1} \gg kT_e \quad (7.37)$$

и

$$\varepsilon_{i>1} - \varepsilon_{p=1} \gg \varepsilon_{i>2} - \varepsilon_{p>1},$$

времена установления квазистационарного распределения среди возбужденных состояний и свободных электронов очень часто гораздо короче, чем время релаксации основного состояния. Тогда, начиная с очень малого времени, можно предположить, что при  $p > 1$

$$\frac{dn(p)}{dt} = 0,$$

в отличие от  $dn(1)/dt$ . В этом случае из системы уравнений (7.34) получают набор алгебраических уравнений вида

$$0 = \sum_{i=1}^{p^*} \{c_{p,i} + c'_{p,i}n(1)\}n(i) + \alpha_p + \alpha'_p n(1), \quad (7.38)$$

где  $p=2, 3 \dots p^*$ .

С учетом условия электронейтральности  $n(c) = zn_z(1)$  в квазистационарной плазме имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \frac{dn(c)}{dt} &= \frac{dn_z(1)}{dt} = \frac{dn(1)}{dt} = \\ &= \sum_{i=1}^{p^*} \{c_{1,i} + c'_{1,i}n(1)\}n(i) + \alpha_1 + \alpha'_1 n(1). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Заменяв плотность основного состояния в слагаемых  $c'_{p,i}n(1)$  и  $\alpha'_p n(1)$  уравнения (7.38) на переменную  $\Phi_1$ , получим для возбужденных уровней ( $p > 1$ ) следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{p^*} (c_{p,i} + c'_{p,i} \Phi_1) n(1) + \alpha_p + \alpha'_p \Phi_1 = 0. \quad (7.38a)$$

При  $\Phi_1 = 0$ , когда плотность  $n(1)$  мала, система линейных уравнений (7.38a) приобретает решения вида

$$n(p) (\Phi_1 = 0) = n^{(0)}(p) (\Phi_1 = 0) + n(1) g_p^{(1)} (\Phi_1 = 0). \quad (7.40)$$

Подставляя эти решения в уравнение (7.39), найдем при  $\Phi_1 = 0$

$$\frac{dn(1)}{dt} = \alpha_1 + \sum_{i=2}^{p^*} c_{1,i} n_i^{(0)} (\Phi_1 = 0) + n(1) \left[ c_{11} + \sum_{i=2}^{p^*} c_{1i} g_i (\Phi_1 = 0) \right]. \quad (7.41)$$

### § 5. ЭФФЕКТИВНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ СКОРОСТИ СТОЛКНОВИТЕЛЬНО-ИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ РЕКОМБИНАЦИИ И ИОНИЗАЦИИ

Определяя коэффициенты скорости столкновительно-излучательной рекомбинации  $\alpha$  и ионизации  $S$  с помощью обобщенного кинетического уравнения

$$\frac{dn(1)}{dt} = \alpha n_{z_+}(1) n(c) - S n(1) n(c), \quad (7.42)$$

найдем из уравнений (7.41) и (7.42)

$$\alpha (\Phi_1 = 0) \equiv \alpha(0) = \frac{1}{n_{z_+}(1) n(c)} \left\{ \alpha_1 + \sum_{i=2}^{p^*} c_{1i} n_i^{(0)} \right\}, \quad (7.43)$$

$$S (\Phi_1 = 0) \equiv S(0) = \frac{1}{n(c)} \left\{ -c_{11} - \sum_{i=2}^{p^*} c_{1i} g_i^{(1)} (\Phi_1 = 0) \right\}. \quad (7.44)$$

Определяемые с помощью соотношений (7.43), (7.44) величины  $\alpha$  и  $S$  зависят только от параметров  $n_e = n(c)$  и  $T_e$ , т. е.

$$\alpha (\Phi_1 = 0) \equiv \alpha(0) = \alpha(n_e, T_e) \quad (7.43a)$$

и

$$S (\Phi_1 = 0) \equiv S(0) = S(n_e, T_e). \quad (7.44a)$$

В случае наличия нелинейных членов, обязанных плотности частиц  $B^{(z-1)+}(1)$  в основном состоянии, можно представить коэффициенты  $\alpha$  и  $S$  в виде

$$\alpha (\Phi_1) = [1 + \Delta_\alpha (\Phi_1)] \alpha(0) \quad (7.45)$$

и

$$S(\Phi_1) = [1 + \Delta_S(\Phi_1)]S(0), \quad (7.46)$$

где  $\Delta_\alpha(\Phi_1)$  и  $\Delta_S(\Phi_1)$  — поправочные члены, учитывающие влияние  $n(1)$  и  $T(1)$  на скорость столкновительно-излучательных процессов. Иначе можно записать

$$\alpha(n_e, T_e, n_{z-1,1}, T_{z-1}) = [1 + \Delta_\alpha] \alpha(n_e, T_e) \quad (7.45a)$$

и

$$S(n_e, T_e, n_{z-1,1}, T_{z-1}) = [1 + \Delta_S] S(n_e, T_e). \quad (7.46a)$$

Решение системы уравнений (7.38a) при  $\Phi_1 \neq 0$  будет иметь вид

$$n(p)(\Phi_1) = n^{(0)}(p)(\Phi_1=0)[1 + \Delta_p^{(0)}] + \\ + n(p)g_p^{(1)}(\Phi_1=0)[1 + \Delta_p^{(1)}], \quad (7.47)$$

где  $p=1, 2, 3 \dots p^*$ ;

$$\Delta_p^{(0)} = \frac{n^{(0)}(p)(\Phi_1) - n^{(0)}(p)(\Phi_1=0)}{n^{(0)}(p)(\Phi_1=0)}, \quad p=2, 3 \dots p^*; \quad (7.48)$$

$$\Delta_p^{(1)} = \frac{g_p^{(1)}(\Phi_1) - g_p^{(1)}(\Phi_1=0)}{g_p^{(1)}(\Phi_1=0)}, \quad p=2, 3 \dots p^*. \quad (7.48a)$$

Подставляя решения (7.47) в уравнение типа (7.39) для  $\Phi_1 \neq 0$  получим

$$\frac{dn(1)}{dt} = \alpha_1 + \alpha'_1 \Phi_1 + \sum_{i=1}^{p^*} (c_{1i} + c'_{1i} \Phi_1) n(i). \quad (7.39a)$$

Сопоставляя уравнения (7.39a) и (7.42), найдем по аналогии с уравнениями (7.43), (7.44)

$$\alpha(\Phi_1) = \frac{1}{n_z(1)n(c)} \left\{ \alpha_1 + \alpha_1 \Phi_1 + \sum_{i=2}^{p^*} c_{1i} n_i^{(0)}(\Phi_1=0) + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^{p^*} [(c_{1i} + c'_{1i} \Phi_1) n_i^{(0)}(\Phi_1)]_{\Phi_1=0} \right\}, \quad (7.49)$$

$$S(\Phi_1) = -\frac{11}{n(c)} \left\{ c_{11} + c'_{11} \Phi_1 + \sum_{i=2}^{p^*} c_{1i} g_i^{(1)}(\Phi_1=0) + \right. \\ \left. + \sum_{i=2}^{p^*} [(c_{1i} + c'_{1i} \Phi_1) g_i^{(1)}(\Phi_1)]_{\Phi_1=0} \right\}. \quad (7.50)$$

Поправочные члены  $\Delta_\alpha(\Phi_1)$  и  $\Delta_S(\Phi_1)$  в уравнениях (7.45), (7.46) зависят от плотности тяжелых частиц  $B^{(z-1)+}(1)$  в ос-



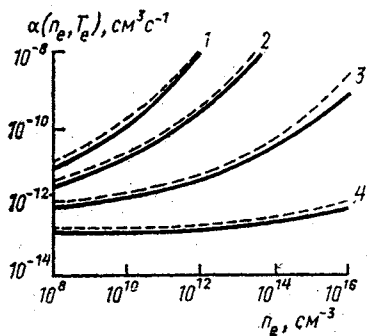


Рис. 26. Коэффициенты скорости столкновительно-излучательной рекомбинации в оптически тонкой водородной плазме при разных  $T_e$ , К: 1 — 500; 2 — 1000; 3 — 4000; 4 — 32000. Сплошные кривые — данные Дравина, пунктирные кривые — данные Бейтса и сопр.

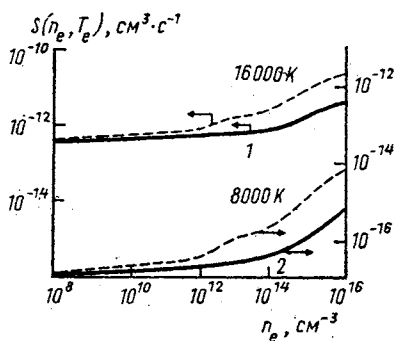


Рис. 27. Коэффициенты скорости столкновительно-излучательной ионизации в оптически тонкой водородной плазме при разных  $T_e$ , К: 1 — 16000; 2 — 8000. Сплошные кривые — данные Дравина, пунктирные кривые — данные Бейтса и сопр.

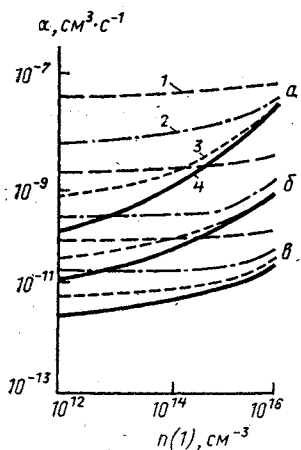


Рис. 28. Эффективные коэффициенты скорости столкновительно-излучательной рекомбинации  $\alpha(n_e, n(1))$ ,  $T_e = T_g$  в оптически тонкой водородной плазме при разных  $T_e$ , К (а — 500; б — 1000; в — 2000) и  $n_e$ ,  $\text{cm}^{-3}$  (1 —  $10^{13}$ ; 2 —  $10^{12}$ ; 3 —  $10^{14}$ ; 4 —  $10^{10}$ )

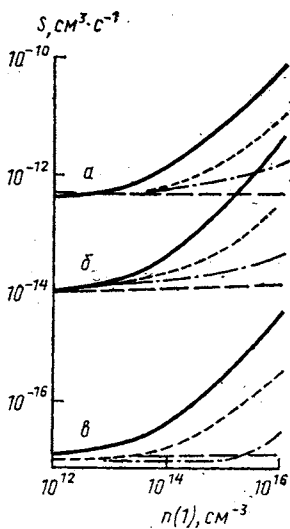


Рис. 29. Эффективные коэффициенты скорости столкновительно-излучательной ионизации  $S(n_e, n(1))$ ,  $T_e = T_g$  в оптически тонкой водородной плазме при разных  $T_e$ , К (а — 16000; б — 12000; в — 8000) и  $n_e$ ,  $\text{cm}^{-3}$  (как указано в подписи к рис. 28)

новном состоянии и могут быть легко вычислены по формулам

$$\Delta_{\alpha}(\Phi_1) = \frac{1}{n(c)n_z(1)\alpha(0)} \left\{ \alpha'_1 \Phi_1 + \left[ \sum_{i=2}^{p^*} (c_{1i} + c'_{1i} \Phi_1) n_i^{(0)}(\Phi_1) \right]_{\Phi_1=0}^{\Phi_1} \right\}, \quad (7.49a)$$

$$\Delta_S(\Phi_1) = -\frac{1}{n(c)S(0)} \left\{ c'_{11} \Phi_1 + \left[ \sum_{i=2}^{p^*} (c_{1i} + c'_{1i} \Phi_1) g_i^{(1)}(\Phi_1) \right]_{\Phi_1=0}^{\Phi_1} \right\} \quad (7.50a)$$

На рис. 26, 27 представлены значения эффективных коэффициентов скорости столкновительно-излучательной рекомбинации  $\alpha(n_e T_e)$  и ионизации  $S(n_e, T_e)$  в оптически тонкой водородной плазме без учета столкновений с тяжелыми частицами.

На рис. 28, 29 даны зависимости значений  $\alpha(n_e, n_{z-1,1}, T_e = T_g)$  и  $S(n_e, n_{z-1,1}, T_e = T_g)$  от плотности тяжелых частиц вида  $V^{(z-1)+(1)}$  в основном состоянии. На рис. 28 видно, что при условии

$$n(c) \leq 10^{-5} n(1) \quad (7.51)$$

$\alpha$  становится независимым от плотности свободных электронов.

В присутствии тяжелых частиц резонансное поглощение увеличивается, так что плазма становится оптически толстой по отношению к линиям лаймановской серии и к лаймановскому континууму.

На рис. 30 показана зависимость  $\alpha(n_e, n(1), T_e = T_g)$  от  $n(1)$  для такого случая, наиболее близкого к реальным опытным условиям. Резонансное поглощение особенно заметно при более высоких температурах; оно уменьшает скорость рекомбинации и увеличивает скорость ионизации.

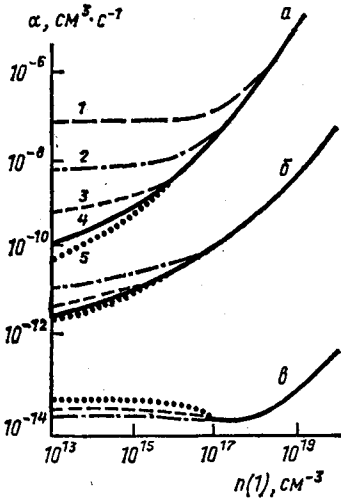


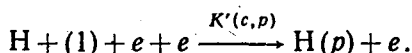
Рис. 30. Коэффициенты скорости рекомбинации  $\alpha(n_e, n(1), T_e = T_g)$  в водородной плазме, оптически толстой по отношению к линиям и континууму Лаймана (все другие линии и континуумы — оптически тонкие). На рисунке указаны разные  $T_e, K$  ( $a - 500; b - 2000; a - 12000$ ) и  $n_e, \text{см}^{-3}$  ( $1-4$  — как указано в подписи к рис. 28;  $5 - 10^9$ )

## § 6. СТОЛКНОВИТЕЛЬНО-ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ ОДНО- И МНОГОЗАРЯДНЫХ ИОНОВ

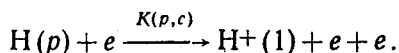
### 1. Оптически тонкая плазма

Бэйтс, Кингстон и Макуиртер предложили статистический метод расчета коэффициентов скоростей столкновительно-излучательной рекомбинации в оптически тонкой плазме. Скорость распада плазмы обусловлена комплексом взаимосвязанных столкновительных и излучательных процессов в плазме. В качестве неупругих столкновительных процессов авторы учитывали соударения только с электронами и пренебрегали соударениями между тяжелыми частицами. Для водорода такими процессами являются следующие.

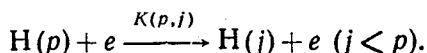
1. Тройная рекомбинация ионов:



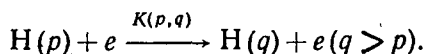
2. Обратный процесс — столкновительная ионизация:



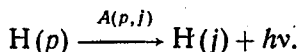
3. Сверхупругие соударения:



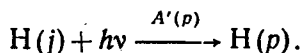
4. Неупругие соударения:



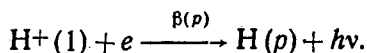
5. Спонтанный радиационный распад:



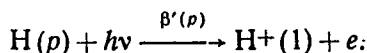
6. Переход вверх при поглощении фотона:



7. Радиационная рекомбинация:



8. Фотоионизация:



Скорость изменения  $n(p)$  со временем равна

$$\frac{dn(p)}{dt} = -[n(c)K(p) + A(p)]n(p) + [K(c,p) + \beta(p)]n(c)n_2(1),$$

(7.52)

где

$$K(p) = K(p, c) + \sum_{p > j} K(p, j) + \sum_{q > p} K(p, q),$$

$$A(p) = A(p, j) - \sum_{j < p} A'(j, p) \rho_v = A(p, j) \lambda_p,$$

$$K(c, p) = n(c) K'(c, p),$$

$$\beta(p) = \beta(c, p) - \beta(p, c) \rho_v = \beta(c, p) \lambda_p.$$
(7.52a)

Поскольку населенность возбужденных уровней в плазме  $n(p)$  обычно много меньше населенности основного состояния  $n(1)$  и плотности свободных электронов, т. е.

$$n(p) \ll n(1) \quad (7.53)$$

и

$$n(p) \ll n(c), \quad (7.54)$$

квазистационарное распределение возбужденных уровней устанавливается без заметного уменьшения плотности свободных электронов и ядер. В результате этого производные  $dn(p)/dt$  при  $p > 1$  можно приравнять нулю без заметной ошибки, а уравнение (7.52) переписать в виде

$$\frac{dn(1)}{dt} = -\frac{dn_z(1)}{dt} = \alpha \{n(c) n_z(1)\} - S \{n(c) n(1)\}, \quad (7.55)$$

или

$$\frac{dn(1)}{dt} = -\frac{dn_z(1)}{dt} = \gamma n_z(1) n(c), \quad (7.56)$$

где  $\alpha$ ,  $S$  и  $\gamma$  называют коэффициентами скорости столкновительно-излучательной рекомбинации, ионизации и распада соответственно. В начале можно пренебречь ионизацией и вычислить скорости рекомбинации. Как видно из получающегося в этом случае кинетического уравнения

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dn(1)}{dt} = \alpha n(c) n_z(1) \quad (7.55a)$$

и уравнения реакции (1),  $\alpha$  не является истинным коэффициентом скорости заселения основного уровня, поскольку зависит от плотности свободных электронов.

При температуре 64 000 К и выше условие (7.53) обычно не выполняется, и, если величина  $n(c)$  достаточно велика, получаются заниженные значения  $\alpha$ .

В разряженной плазме (при низких значениях  $n(c)$ ) рекомбинация — чисто излучательная, и коэффициент скорости излучательной рекомбинации  $\beta(1)$  слабо зависит от температуры плазмы. На рис. 31 представлена зависимость коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta(1)$  от температуры в оптически тонкой водородной плазме.

Значения столкновительно-излучательных коэффициентов  $\alpha$  и  $S$  зависят от заряда рекомбинируемых ионов и мало чувствительны к видам ионов. Для многократно заряженных ионов законы подобия позволяют выбрать приведенные значения

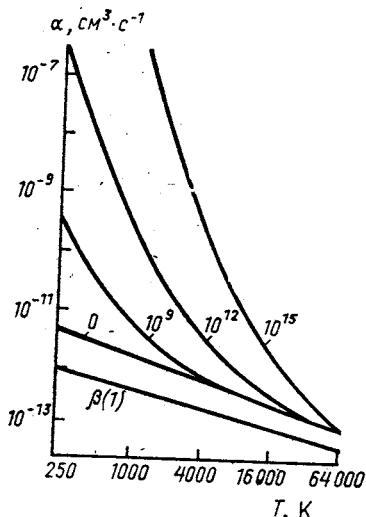


Рис. 31. Зависимость коэффициента скорости столкновительно-излучательной рекомбинации ионов водорода  $\alpha$  от температуры в оптически тонкой плазме. Для каждой кривой указана плотность электронов;  $\beta(T)$  — коэффициент излучательной рекомбинации в основной уровень

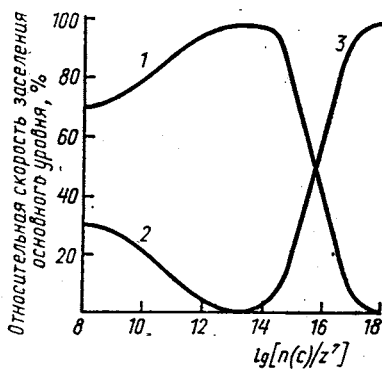


Рис. 32. Относительная скорость заселения основного уровня: 1 — при спонтанных излучательных переходах с возбужденных уровней; 2 — при излучательной рекомбинации; 3 — при сверхупругих столкновениях с электронами. Тройная рекомбинация из континуума дает всюду менее 0,5%

электронных температур  $\theta = T/z^2$  и плотностей  $\eta(c) = n(c)/z^7$ , так что приведенные значения коэффициентов скоростей

$$\alpha/z = f(\theta, \eta(c)) \text{ и } Sz^3 = \varphi(\theta, \eta(c)) \quad (7.57)$$

являются функциями только  $\theta$  и  $\eta(c)$ . При заданных значениях  $\theta$  и  $\eta(c)$  они имеют величины того же порядка, что и коэффициенты  $\alpha$  и  $S$  при тех же численных значениях  $T$  и  $n(c)$ .

## 2. Оптически толстая плазма

В случае очень горячей и очень плотной плазмы, когда основной уровень заселяется главным образом при столкновительных переходах с возбужденных уровней,  $n(p)$  не зависит от  $z$ , а  $K(p, 1) \sim z^{-2}$  и, следовательно,

$$\alpha \sim z^{-2} \quad (7.57a)$$

На рис. 32 показано заселение основного уровня (в процентах) при  $\theta = 4000$  К. Если оптическая толщина, например, водородной плазмы такова, что для всех линий и континуума

$$\tau(\nu) \ll 1, \quad (7.58)$$

а для лаймановской серии линий

$$\tau(\nu) \gg 1, \quad (7.58a)$$

то в этом случае лаймановские линии реабсорбированы и каждый спонтанный радиационный распад уровня  $p$  уравновешен обратными переходами с нижележащих уровней. В общем, становится невозможным сгруппировать уровень 2 с другими возбужденными уровнями, и условия (7.53), (7.54) записываются в виде

$$n(p) (p > 2) \ll \{n(1) + n(2)\} \quad (7.59)$$

и

$$n(p) (p > 2) \ll n(c). \quad (7.60)$$

Уравнение  $-\frac{dn_z(1)}{dt} = \frac{dn(1)}{dt}$  должно быть заменено на другое:

$$-\frac{dn_z(1)}{dt} = \frac{dn(1)}{dt} + \frac{dn(2)}{dt}. \quad (7.61)$$

Оба слагаемых уравнения (7.61) можно представить в виде

$$\frac{dn(1)}{dt} = a_1 n_z(1) n(c) + P_{21} n(2) n(c) - R_1 n(1) n(c) \quad (7.62)$$

и

$$\frac{dn(2)}{dt} = a_2 n_z(1) n(c) + P_{12} n(1) n(c) - R_2 n(2) n(c). \quad (7.63)$$

Здесь  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{21}$ ,  $R_1$  и  $R_2$ , подобно  $\alpha$  и  $S$  в уравнении (7.55), положительные величины, зависящие от  $n(c)$ ,  $T$  и атомных параметров, которые могут быть вычислены при определенных значениях  $n(c)$  и  $T$ .

В соответствии с иерархией времен релаксационных процессов (ур. 4.33) можно записать

$$\tau(2) \ll \tau(1), \quad (7.64)$$

$$\tau(2) \ll \tau_c, \quad \tau(2) \ll \tau_z(1), \quad (7.65)$$

где  $\tau$  — соответственно времена релаксации частиц вида  $A^{(z-1)+}$  на уровнях (1) и (2), электронов и ионов вида  $A^{z+}(1)$ . Следовательно,  $n(2)$  очень быстро достигает квазистационарного значения:

$$n_2 = \frac{a_2 n_z(1) + P_{12} n(1)}{R_2}. \quad (7.63a)$$

Уравнение (7.61) можно записать так:

$$\frac{dn_z(1)}{dt} = \alpha^{(i)} \{n_z(1) n(c)\} - S^{(i)} \{n(1) n(c)\}. \quad (7.66)$$

В этом уравнении коэффициенты  $\alpha^{(i)}$  и  $S^{(i)}$  учитывают самопоглощение лаймановских линий:

$$\alpha^{(i)} = a_1 + \frac{P_{21}}{R_2} a_2 \quad (7.67)$$

и

$$S^{(i)} = R_1 - \frac{P_{21}}{R_2} P_{12}. \quad (7.68)$$

Поскольку  $P_{21}$  лишь немного меньше  $R_2$ , можно принять

$$\alpha^{(i)} = a_1 + a_2 \quad (7.67a)$$

и

$$S^{(i)} = R_1 - R_2. \quad (7.68a)$$

В плазме, оптически толстой и по отношению к континууму Лаймана,

$$\alpha^{(i, c)} = \alpha^{(i)} - \beta(1), \quad (7.69)$$

где  $\beta(1)$  — коэффициент скорости излучательной рекомбинации в основное состояние.

Если наряду с линиями Лаймана поглощаются линии других серий (Бальмера, Пашена и др.), вероятности всех спонтанных переходов стремятся к нулю. Это вносит упрощение в систему уравнений, определяющих квазистационарное состояние распадающейся плазмы. Коэффициент скорости столкновительно-излучательной рекомбинации может быть представлен в виде

$$\alpha^{(ii)} = k_i n(c) + \alpha_r, \quad (7.70)$$

где  $k_i$  ( $\text{см}^6 \cdot \text{с}^{-1}$ ) — коэффициент скорости тройной столкновительно-рекомбинации,  $\alpha_r$  ( $\text{см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ ) — коэффициент скорости двойной столкновительно-излучательной рекомбинации. Оба этих коэффициента являются функциями только температуры. При поглощении и континуума Лаймана

$$\alpha^{(iic)} = \alpha^{(ii)} - \beta(1) = [\alpha_r - \beta(1)] + k_i n(c), \quad (7.71)$$

где  $\alpha_r - \beta(1)$  много меньше, чем  $\alpha_r$  или  $\beta(1)$ .

На рис. 33, 34 показано изменение с температурой и плотностью электронов коэффициентов скорости столкновительно-излучательной рекомбинации ионов водорода.

Опыты показывают, что лабораторная плазма — обычно оптически толстая по отношению к линиям Лаймана, т. е. при

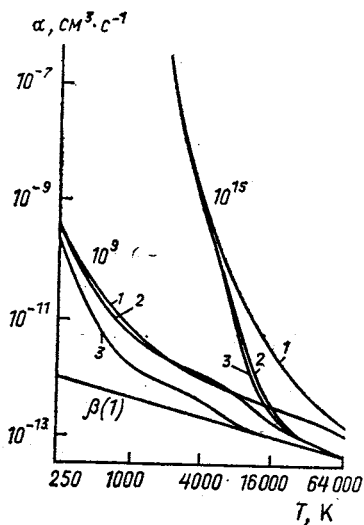


Рис. 33. Зависимость коэффициента скорости столкновительно-излучательной рекомбинации ионов водорода от температуры: 1 — в оптически тонкой плазме; 2 — в плазме, оптически толстой по отношению к линиям серии Лаймана; 3 — в плазме, оптически толстой по отношению к линиям всех серий;  $\beta(1)$  — коэффициент излучательной рекомбинации на основной уровень. На рисунке указана плотность электронов

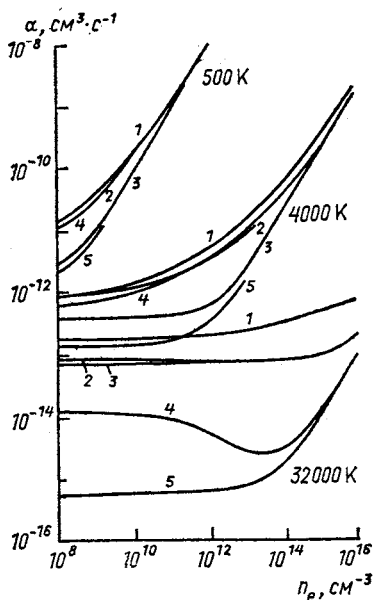


Рис. 34. Зависимость коэффициента скорости столкновительно-излучательной рекомбинации ионов водорода от плотности электронов: 1—3 — как указано в подписи к рис. 33; 4 — в плазме, оптически толстой по отношению к линиям Лаймана и континууму Лаймана; 5 — в плазме, оптически толстой по отношению к линиям всех серий и к континууму Лаймана. На рисунке указана электронная температура

расчетах кинетики распада такой плазмы без серьезных ошибок можно пользоваться коэффициентами вида  $\alpha^{(i)}$ . Континуум Лаймана поглощается при выполнении условия

$$n(1)d \geq 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-2}, \quad (7.72)$$

где  $d$  — геометрическая толщина плазмы.

### § 7. РОЛЬ ДИФфуЗИИ В МЕХАНИЗМЕ РЕКОМБИНАЦИИ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

Изменение плотности электронов в период распада плазмы обусловлено рядом конкурирующих процессов. Рассмотрим простейший случай, когда плазма вначале содержит только электроны, положительные ионы и атомы. Примем в качестве про-



цессов увода электронов объемную рекомбинацию и амбиполярную диффузию к стенкам, где заряженные частицы нейтрализуются. Тогда можно записать, что

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = D_a \nabla^2 n_e - \alpha n_+ n_e, \quad (7.73)$$

где  $D_a$  — коэффициент амбиполярной диффузии;  $\alpha$  — коэффициент скорости столкновительно-излучательной рекомбинации.

Так как плазма в любой момент времени должна быть электронейтральной, то  $n_e \sim n_+$ , и поэтому

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = D_a \nabla^2 n_e - \alpha n_e^2. \quad (7.73a)$$

В водородной плазме, когда диффузия отсутствует, имеем

$$\frac{1}{n_e} = \frac{1}{n_e(0)} + \alpha t. \quad (7.74)$$

При отсутствии рекомбинации (высокая температура) получим

$$n_e = \sum_i a_i \exp\left(-\frac{t}{t_i}\right), \quad (7.75)$$

где  $t_i = l_{D,i}^2/D_a$  и  $l_{D,i}$  — характеристическая длина диффузии для  $i$ -го распределения. Для слабой диффузии и небольшой рекомбинации решением уравнения (7.73a) является

$$\frac{n}{1 + \alpha t_1 n_e} = \frac{n_e(0) \exp\left(-\frac{t}{t_1}\right)}{1 + \alpha t_1 n_e(0)}, \quad (7.76)$$

где  $t_1$  относится к первому члену ряда (7.75).

В общем случае решение уравнения (7.73a) было рассмотрено Вильгельмом, который переписал его в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} n_{\pm} = D \nabla^2 n_{\pm} - \alpha n_{\pm}^2. \quad (7.77)$$

Вследствие коллективного движения этому уравнению должны удовлетворять плотности электронов и ионов ( $n_e$  и  $n_i$ ). При повышенной электронной температуре ( $T_e > T_0$ ) будет преобладать диффузия, при релаксирующей электронной температуре (газ с низкой энергией возбуждения,  $T_e \sim T_0$ ) ответственной за распад плазмы будет чистая рекомбинация.

Коэффициент диффузии  $D$  описывает комбинированное движение заряженных частиц противоположного знака и равен

$$D = \frac{(D_i q_e B_e - D_e q_i B_i)}{q_e B_e - q_i B_i}, \quad (7.78)$$

где  $q_e$  и  $q_i$  — заряды;  $D_e$  и  $D_i$  — диффузности;  $B_e$  и  $B_i$  — под-

вижности электронов и ионов. Последние даются соотношениями

$$D_j = \left( \frac{kT_j}{m_j} \right) \tau_{j0}; \quad B_j = \frac{\tau_{j0}}{m_j}, \quad (7.79)$$

где  $\tau_{j0}$  — время релаксации момента импульса, определяемое с помощью столкновительного интеграла Больцмана

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \mathbf{v} [\delta f_j(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) / \delta t]_0 d\mathbf{v} = -(n_j v_j) \tau_{j0}^{-1}. \quad (7.80)$$

В приближении инфразвукового дрейфа, когда

$$m_{j0} v_j^2 / 2 \ll kT_{j0}, \quad (7.81)$$

значение  $\tau_{j0}^{-1}$  равно

$$\tau_{j0}^{-1} = \frac{8}{3} \left( \frac{2kT_{j0}}{\pi m_{j0}} \right)^{1/2} \left( \frac{m_{j0}}{m_j} \right) n_0 \sigma_{j0}. \quad (7.82)$$

Для низкотемпературных взаимодействий сечение транспортно-го переноса равно

$$\sigma_{j0} = 4\pi a_{j0}, \quad (7.83)$$

где  $a_{j0}$  — соответствующая амплитуда рассеяния.

Решение нелинейного уравнения (7.77) приводит к следующему пространственному распределению плотности заряженных частиц в плазменной (ионизационной) колонне:

$$n_{\pm}(r, t) = \frac{N_{\pm}(0) \exp(-r^2/\Lambda^2)}{\pi\Lambda^2 + \alpha t \exp(-r^2/\Lambda^2)}. \quad (7.84)$$

Здесь  $N_{\pm}(0)$  — общее число частиц на единицу колонны;

$$\Lambda \equiv b^2 + 4Dt; \quad (7.85)$$

$b$  — параметр распределения:

$$b = (4/\pi)^{1/2} \bar{r}(0); \quad (7.86)$$

$\bar{r}(0)$  — среднее расстояние частиц от оси колонны.

Рекомбинация в отдельной ионизационной колонне идет по следующему закону:

$$n_{\pm}(t) = n_{\pm}(0) \frac{\ln(1+a)}{a}, \quad (7.87)$$

где  $a$  — безразмерный параметр, который зависит от времени:

$$a = [\alpha N_{\pm}(0) / \pi \Lambda^2] t \begin{cases} = 0 & \text{при } t \rightarrow 0, \\ = \frac{\alpha N_{\pm}(0)}{4\pi D} & \text{при } t \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (7.88)$$

До смешения ионизационных колонн путем диффузии, т. е. во

времена  $0 \leq t \leq \tau_{см}$ , в колоннах происходит рекомбинационный распад плазмы по линейному закону:

$$\frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} = -\bar{\alpha}_L(t) \bar{n}_{\pm} \quad (7.89)$$

или по нелинейному закону:

$$\frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} = -\bar{\alpha}_N(t) \bar{n}_{\pm}^2, \quad (7.90)$$

так что

$$\bar{\alpha}_L(t) = \bar{\alpha}_N(t) \bar{n}_{\pm}(t).$$

Решения уравнений (7.89) и (7.90) дают значения коэффициентов скорости электронно-ионной рекомбинации, которые зависят от времени вследствие динамики колонн, определяемой электростатической диффузией:

$$\bar{\alpha}_L(t) = \frac{1}{t} \left( \frac{b}{\Lambda} \right)^2 \left[ 1 - \frac{a}{(1+a) \ln(1+a)} \right], \quad (7.89a)$$

$$\bar{\alpha}_N(t) = \frac{1}{tn(t)} \left( \frac{b}{\Lambda} \right)^2 \left[ 1 - \frac{a}{(1+a) \ln(1+a)} \right]. \quad (7.90a)$$

Лишь при малых значениях параметра  $a$  ( $a \ll 1$ ) величины  $\bar{\alpha}_L$  и  $\bar{\alpha}_N$  не зависят от времени:

$$\bar{\alpha}_L \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{b}{\Lambda} \right)^2 N_{\pm}(0) \frac{\alpha}{\pi \Lambda^2}, \quad (7.89б)$$

$$\bar{\alpha}_N \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{b}{\Lambda} \right)^2 \left( \frac{\alpha}{\pi \Lambda^2 z L} \right), \quad (7.90б)$$

где  $z$  — число колонн в единице объема;  $L$  — длина колонны и  $\alpha$  — коэффициент скорости объемной рекомбинации по Бэйтсу. Объемная рекомбинация происходит после смешения колонн путем диффузии, т. е. начиная со времени  $\tau_{см} \leq t \leq \infty$ , и следует формально тому же закону, что и нелинейная рекомбинация в отдельных колоннах. Однако распад замедляется по мере того, как он распространяется на весь объем, так что после времени  $t \gg \tau_{см}$

$$\bar{\alpha}_N(t) \rightarrow \alpha,$$

который не зависит от времени.

Уравнение (7.84) теряет свое значение для времен, при которых дебаевский радиус экранирования

$$l_D = \left\{ \sum_j \frac{kT_j}{4\pi n_j q_j^2} \right\}^{1/2} \quad (7.91)$$

превышает радиус колонны:  $l_D \gg r(t)$ .

В этом случае плотность заряженных частиц столь мала (вследствие совершенной рекомбинации и диффузии), что нарушается условие коллективного движения заряженных частиц.

Изучая распад гелиевой плазмы при  $p_0 = 3-8$  мм рт.ст. и аргонной плазмы при  $p_0 = 0,2-0,8$  мм рт.ст. в плазматроне при плотности электронов  $n_e = 10^{14}-10^{15}$  см $^{-3}$ , Гуси-

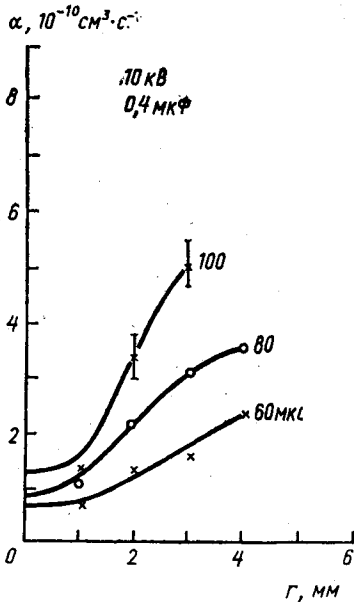


Рис. 35. Коэффициент скорости рекомбинации как функция радиуса в гелиевой плазме через 36 мкс после выключения разряда ( $p_{He} = 7$  мм рт. ст.)

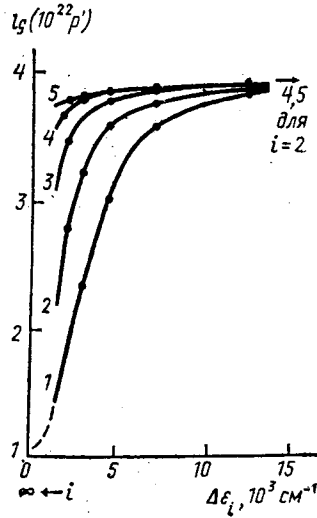


Рис. 36. Зависимость  $\lg P'_{z,i}(n_e, T_e)$  от  $\Delta \epsilon_i$  ( $\Delta \epsilon_i = \epsilon_{\text{ион}} - \epsilon_i$ ) для атомов водорода при  $kT_e = 10$  эВ и разных  $n_e$ , см $^{-3}$  (1, 2, 3, 4 — как указано в подписи к рис. 28, 5 —  $10^8$ )

нов и сотр. обнаружили неоднородность распределения нейтральных частиц и температуры. Вычисленные по Бэйтсу коэффициенты  $\alpha$  отличались от опытных величин, которые зависели от времени и расстояния от оси плазматрона (рис. 35). Сравнение вычисленных коэффициентов с опытными дало возможность оценить потерю электронов благодаря диффузии.

### 1. О «двух группах» электронов с различными средними энергиями

В разрядах низкого давления (в высокочастотном безэлектродном разряде, в лампах с полым катодом, в отраженной дуге и т. п.) населенность высоких возбужденных уровней часто

отклоняется от равновесной. Вычисленная из отношения интенсивностей температура оказалась чрезвычайно низкой (500—1500 К), т. е. была явно недостаточной для осуществления самостоятельного разряда в стационарном состоянии. Для стационарного разряда при  $n_e \sim 10^{12} \text{ см}^{-3}$  и общей плотности частиц  $\sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$  необходима более высокая температура  $\sim 10^4 \text{ К}$  газа. Для объяснения расхождений было предложено ввести в рассмотрение две группы электронов с различными средними энергиями. Впоследствии Дравин с сотр. показал, что для

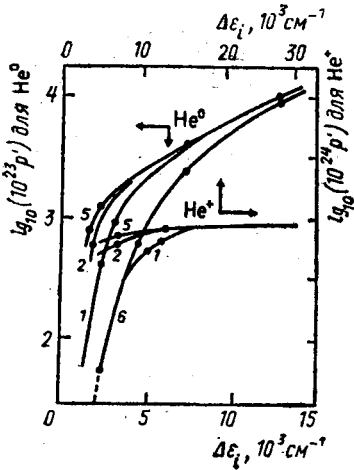


Рис. 37. Зависимость  $\lg P'_{zi}(n_e, T_e)$  от  $\Delta\epsilon_i$  для атомов и ионов гелия при  $kT_e = 10 \text{ эВ}$  и разных  $n_e, \text{ см}^{-3}$  (1—5 — как указано в подписи к рис. 28 и 36, 6 —  $10^{14}$ )

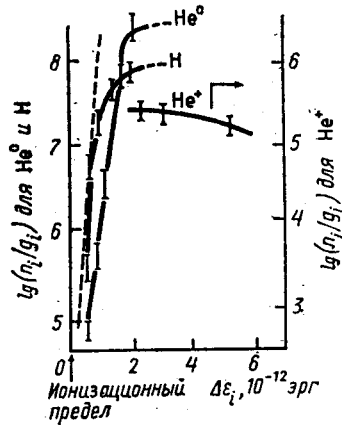


Рис. 38. Измеренная населенность уровней водорода (при  $r=0,25 \text{ см}$ ) и гелия (при  $r=0,0 \text{ см}$ ) при разных  $\Delta\epsilon_i$

всех нетермических разрядов низкого давления учет диффузии нейтральных частиц через плазменную колонну без ионизации позволяет достаточно хорошо объяснить имевшиеся расхождения при учете одного набора электронов с максвелловским распределением по скоростям движения. В этом случае необходимо лишь статическую модель плазмы заменить динамической и учесть при вычислении населенностей возбужденных уровней большую длину свободного пробега нейтральных частиц (атомов), т. е. надо записать уравнение распада плазмы в виде

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{i \neq j} K_{ij} - \sum_{i \neq j} K_{ji} - \nabla \Gamma_i, \quad (7.92)$$

где  $K_{ij}$  и  $K_{ji}$  — коэффициенты заселения и распада  $j$ -го уровня соответственно;  $\nabla \Gamma_i$  — диффузионный член. Если существуют

градиенты температуры и плотности в плазменной колонне, уравнение (7.92) будет нарушаться. В случае стационарной диффузии  $\nabla \Gamma_i = 0$ , и населенность возбужденных уровней следует уравнению

$$\frac{n_{z,i}}{g_{z,i}} = n_z(1) n_e \frac{P_{z,i}(n_e, T_e)}{g_{z,i}} = n_z(1) n_e P'_{z,i}(n_e, T_e), \quad (7.93)$$

которое отличается от уравнения Саха. В уравнении (7.93) величина  $P'_{z,i}(n_e, T_e)$  — сложная функция от электронных температуры и плотности, от вероятностей переходов, сил осцилляторов и т. п.;  $g_i$  — статистический вес. Так, если принять для  $\text{HI}(z=0)P'_{z,i}$ , равную  $10^{-22}$ , для  $\text{HeI}(z=0) — 10^{-23}$  и для  $\text{HeII}(z=0) — 10^{-24}$ , то для различных значений  $n_e$  и  $T_e$  получаются кривые зависимости  $\lg n_{z,i}/g_{z,i}$  от  $\Delta \epsilon_i$ , совпадающие с опытными кривыми (рис. 36—38). Таким образом, введение нескольких температур (или нескольких групп электронов) не является необходимым для объяснения получаемых зависимостей. Из опытных зависимостей определены следующие значения  $n_e$  и  $T_e$ : а) в водородной плазме: при  $n_0 = 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ;  $n_e = (1-3) \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $kT_e = 8-11 \text{ эВ}$ ; б) в гелиевой плазме при  $n_0 = 4 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ;  $n_e = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $kT_e = 11-15 \text{ эВ}$ .

Полученные значения  $T_e$  согласуются с определенными из масс-спектрометрических измерений отношениями плотностей ионов  $\text{He}^+$  и  $\text{He}^{2+}$  и вычисленными для стационарной корональной модели плазмы, когда

$$\frac{n(\text{He}^{2+})}{n(\text{He}^+)} = \frac{S(T_e)}{\beta(T_e)}, \quad (7.94)$$

где  $\beta(T_e)$  — вероятность излучательной рекомбинации.

## 2. Модель двумерной ионизационной колонны

Рассмотрим упрощенную двумерную модель плазменной колонны (рис. 39). Пусть  $R_0$  — радиус внешней колонны, окруженной нейтральными атомами с плотностью  $n_0 = n_0(R_0)$  при  $r \geq R_0$ ; длина свободного пробега нейтральных атомов  $\lambda_0 \geq 2R_0$ . После некоторого времени установится стационарное состояние

$$\frac{dn_i}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots p. \quad (7.95)$$

Существенны столкновения нейтральных атомов только с электронами, поэтому

$$\frac{dn_e}{dt} = \frac{dn_+}{dt} = 0. \quad (7.96)$$

Определим  $n_i$  в элементе объема  $\Delta V$ :

$$\Delta V(r) = L r d\varphi dr,$$

где  $L$  — длина колонны. Пусть  $n_0$  нейтральных атомов проходит через элемент  $\Delta F$  в направлении объема  $\Delta V(r_k)$  со скоростью  $v_t = \text{const}$  (если пренебречь перезарядкой). Расстояние от  $\Delta F$  до  $\Delta V(r_k)$  равно  $\rho = r_k \cos \gamma + (R_0^2 - r_k^2 \sin^2 \gamma)^{1/2}$ . Для  $r_k \leq r \leq R_0$  получим  $d\rho = \frac{r dr}{(r^2 - r_k^2 \sin^2 \gamma)^{1/2}}$ , где  $r_k$  — радиус внутренней колонны.

Элемент поверхности  $\Delta F$ , который «виден» из элемента объема  $\Delta V(r_k)$ , можно определить из выражения

$$\Delta F = \rho \frac{R_0}{(R_0^2 - r_k^2 \sin^2 \gamma)^{1/2}} \Delta \gamma.$$

Общая поверхность колонны оказывается равной

$$L \int \Delta F = 2\pi R_0 L.$$

Пусть вероятность рекомбинации  $(\alpha_1 + n_e \beta_1)$  частиц в основном состоянии при  $kT_e = 1-10$  эВ много меньше вероятности ионизации, равной  $S_1 = (\sigma_{\text{ион}} v_e)$ , т. е.  $\alpha_1 + n_e \beta_1 \ll S_1$ ,

и

$$n_1 \gg n_i, \quad i = 2, 3, \dots, \rho.$$

Тогда

$$n_0(r) = \sum_{i=1}^{\rho} n_i(r), \quad (7.97)$$

где  $n_i(r)$  определяется из дифференциального уравнения

$$v_t d(\Delta n_0(r)) = -\Delta n_0(r) n_e(r) S_1(r) d\rho. \quad (7.98)$$

При этом

$$v_t \Delta n_0(R_0) = n_0(R_0) \frac{\Delta F}{F} v_t,$$

т. е. равно числу частиц, проходящих через  $\Delta F$  в единицу времени по направлению  $\Delta V(r_k)$ . Интегрирование уравнения (7.98) по  $d\rho$  и  $\Delta F$  дает

$$n_1(r_k) \simeq n_0(r_k) = n_0(R_0) \frac{1}{\pi} \int_{\gamma=0}^{\gamma=\pi} d\gamma \exp \left\{ - \int_{r_k}^{R_0} \frac{n_e(r) S_1(r)}{v_t} \frac{r dr}{[r^2 - r_k^2 \sin^2 \gamma]^{1/2}} \right\}, \quad (7.9)$$

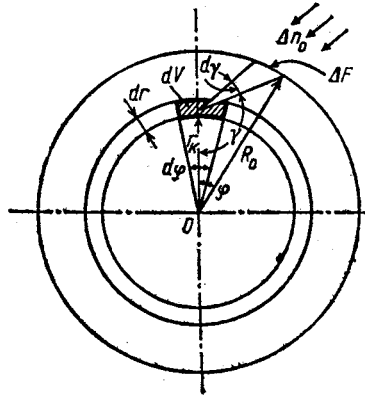


Рис. 39. Двумерная модель плазменной колонны: при  $r \gg R_0$  плотность нейтральных частиц  $n_0 = n_0(R_0)$ . Поток частиц  $\Delta n_0$  течет через элемент  $\Delta F$  в направлении к  $\Delta V_r$ .

где  $S_1 = \langle \sigma_{\text{ион}} v_e \rangle = \int \sigma_{\text{ион}} f(v_e) v_e dv_e$  и  $f(v_e)$  — функция распределения электронов по скоростям.

Плотность частиц на возбужденных уровнях определяется при решении системы сопряженных уравнений вида

$$(a_{ij}) n_j = -n_+ n_e (a_i + n_e \beta_i), \quad (7.100)$$

где  $(a_{ij})$  — матрица коэффициентов  $a_{ij}$ , зависящих от поперечных сечений столкновительных процессов, от сил осцилляторов и вероятностей переходов. Через величины  $n_1(r)$ ,  $n_e(r)$  и  $T_e(r)$  уравнение (7.99) сопряжено с уравнением (7.100), которое было решено для оптически тонкой плазмы и максвелловского распределения электронов.

Значения  $n_e(r)$  определяют из вероятностей  $P_i'(n_e, T_e)$ , измеряя интенсивности 10—15 бальмеровских линий на разных расстояниях от оси колонны, т. е.  $n_i(r)/g_i$ , которые мало чувствительны к  $T_e$ . После этого решают совместно уравнения (7.93) и (7.99) и из абсолютных значений  $n_i/g_i$  определяют  $T_e(r)$ .

Решение уравнения (7.100) показало, что в лабораторной плазме при  $n_e \leq n_1$  и  $10^{10} \text{ см}^{-3} \leq n_0 \leq 10^{15} \text{ см}^{-3}$  вплоть до  $i=15$

$$n_i \sim n_1 \quad (7.101)$$

и не зависит от  $n_e$ . Пропорциональность теряется, если  $n_e > n_1$  и  $i > 15$ , когда населенность возбужденных уровней определяется в основном рекомбинацией при тройных столкновениях с электронами. Для условий:  $n_e \leq n_1 \leq 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $kT_e \geq 3 \text{ эВ}$ ,

$$i < 10 \sqrt{10^{14}/n_e (\text{см}^{-3})} \quad (7.102)$$

населенность возбужденных уровней целесообразно вычислять по формуле

$$n_i/g_i = n_1 n_e P_i'(n_e, T_e), \quad (7.102a)$$

где  $g_i$  — статистический вес  $i$ -го уровня.

При высоких значениях  $i$  функция  $P_i'$  прямо пропорциональна  $i$  (рис. 40) и обратно пропорциональна  $kT_e$ . Если населенность  $n_i/g_i$  достигает прямой, то она согласуется с вычисленной по уравнению Саха

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{n_+ n_e}{2g_+} \frac{h^3}{(2\pi m k T_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT_e}\right), \quad (7.103)$$

где  $\epsilon_i = \frac{\epsilon_1^{\text{H}}}{i^2}$  и  $\epsilon_1^{\text{H}}$  — энергия ионизации H-атома,  $g_+ = 1$  для водорода.

Так, при  $n_e \geq 10^{14} \text{ см}^{-3}$  (как это наблюдается в плазмотронах),  $n_i \sim n_1$  вплоть до  $i=10$ . Для  $i > 10$  населенность подчиняется уравнению Саха (7.103).



На рис. 41 показана зависимость  $\lg \frac{n_i}{g_i}$  от  $i$  трех различных состояний плазмы: 1) локальное термическое равновесие (ЛТР), 2) стационарная плазма с отклонением от ЛТР и 3) нетермическая стационарная плазма с диффузией нейтральных частиц.

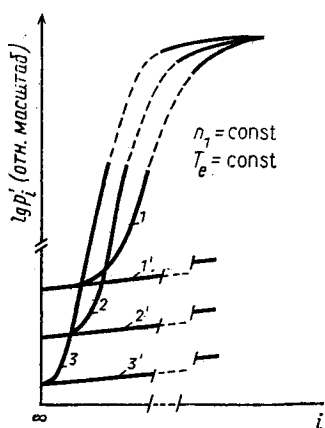


Рис. 40. Зависимость  $\lg P_i'$  от номера уровня  $i$  для заданных значений электронной температуры и плотности частиц ( $T_e = \text{const}$ ,  $n(1) = \text{const}$ ) при разных значениях  $n_e$ ,  $\text{см}^{-3}$  (1 —  $10^{14}$ ; 2 —  $10^{13}$ ; 3 —  $10^{12}$ ; 1' — 3' — те же значения  $n_e$ , вычисленные по уравнению Саха)

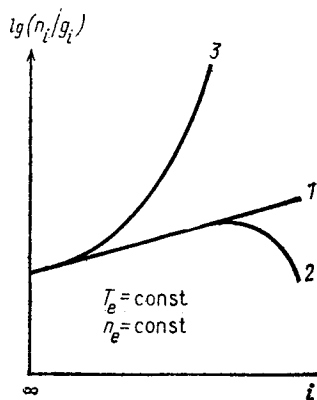


Рис. 41. Зависимость  $\lg(n_i/g_i)$  от главного квантового числа  $i$ : 1 — плазма в состоянии полного ЛТР; 2 — стационарная плазма с отклонениями от ЛТР; 3 — стационарная нетермическая плазма с сильным диффузионным потоком нейтральных частиц

Если вдувать инертный газ во внешнюю зону, так чтобы уменьшить диффузию, то кривая 3 перейдет в кривую 2. При переходе через прямую 1 уровни будут показывать населенность по уравнению Саха, хотя никакого ЛТР в плазме не будет.

## § 8. РЕКОМБИНАЦИЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПЛАЗМЕ

### 1. Учет уравнения энергетического баланса. Отсутствие диффузии частиц

Вследствие того что скорость тройной столкновительной рекомбинации весьма чувствительна к электронной температуре ( $\alpha \sim \text{const} \cdot T_e^{9/2}$ ), уравнения распада электронной энергии играют существенную роль при расчетах коэффициентов скорости рекомбинации.

В случае чистой рекомбинации (при отсутствии диффузии) электронная температура определяется из следующего уравнения электронной энергии:

$$\frac{3}{2} n_e k \left( \frac{\partial T_e}{\partial t} \right) = W_{\text{неупр}} - W_{\text{упр}}, \quad (7.104)$$

где  $W_{\text{неупр}}$  — скорость неупругого переноса энергии к электронам при рекомбинации;  $W_{\text{упр}}$  — скорость упругого переноса энергии от электронов к атомам и ионам.

Легко доказать, что

$$W_{\text{неупр}} = \left( \bar{\varepsilon} + \frac{5}{2} k T_e \right) \frac{dn_e}{dt}, \quad (7.105)$$

где  $\bar{\varepsilon}$  — средняя энергия, отдаваемая электрону каждым рекомбинирующимся ионом.

Часто  $\bar{\varepsilon} \gg \frac{3}{2} k T_e$ , так что  $\frac{3}{2} n_e k \frac{dT_e}{dt} \ll W_{\text{неупр}}$ . При этих условиях, используя уравнения кинетики столкновительной рекомбинации

$$\frac{dn_e}{dt} = \alpha n_e^2 \quad (7.106)$$

и энергетического баланса

$$\left( \bar{\varepsilon} + \frac{5}{2} k T_e \right) \frac{dn_e}{dt} \simeq W_{\text{упр}}, \quad (7.107)$$

можно прямо вычислить значения  $\alpha$ :

$$\alpha \simeq \frac{W_{\text{упр}}}{\bar{\varepsilon} + \frac{5}{2} k T_e} \frac{1}{n_e^2}. \quad (7.108)$$

Вычисляемые по уравнению (7.108) коэффициенты  $\alpha$  оказываются примерно на два порядка выше коэффициентов излучательной рекомбинации, но хорошо удовлетворяют опытным данным.

Так как электроны отдают энергию преимущественно ионам, скорость упругой передачи энергии равна

$$W_{\text{упр}} = \frac{n_e^2 e^4}{M_i} \left( \frac{8\pi m_e}{k T_e} \right)^{1/2} \left( \frac{T_e - T_i}{T_e} \right) \ln \left\{ \frac{9 (k T_e)^3}{8\pi n_e e^6} \right\}, \quad (7.109)$$

где  $M_i$  и  $T_i$  — масса и температура ионов. Подставляя  $W_{\text{упр}}$  в уравнение (7.108), получим в грубом приближении, что  $\alpha$  не зависит от плотности электронов. Тройной характер столкновительной рекомбинации и процесс девозбуждения маскируются скоростью изменения электронной температуры. В общем случае надо одновременно решать уравнения тройной рекомбина-

ции и электронной энергии, чтобы получить значения  $\frac{dn_e}{dt}$  и  $\frac{dT_e}{dt}$ . Это было сделано Куксом и сотр., которые исследовали рекомбинацию в послесвечении гелиевой плазмы. Авторы нашли, что в интервале изменения плотности электронов  $10^{11} \text{ см}^{-3} \leq n_e \leq 5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$  и электронной энергии  $0,03 \text{ эВ} \leq kT_e \leq 0,3 \text{ эВ}$  скорость изменения плотности электронов меняется по уравнению

$$\frac{dn_e}{dt} = 0,7 \cdot 10^{-19} \frac{n_e^{5/2}}{(kT_e)^3}. \quad (7.110)$$

Изменение температуры со временем объяснено протеканием двух конкурирующих процессов: а) перезарядкой, когда электроны теряют энергию, и б) рекомбинацией ионов, когда электроны приобретают энергию в основном от образующихся метастабильных атомов. Вследствие этого изменение электронной энергии со временем будет равно

$$3 \frac{d}{dt} (n_e kT_e) = -n_0 n_e \sigma_r v_i \frac{3}{2} k(T_e - T_0) + n_m n_e \sigma_e v_e \epsilon_d, \quad (7.111)$$

где  $n_0$  и  $n_m$  — плотность атомов в основном состоянии и соответственно плотность метастабильных атомов;  $\sigma_r$  — сечение перезарядки ( $\sim 3 \cdot 10^{-15} \text{ см}^2$ );  $\sigma_e$  — сечение разрушения метастабильных атомов ( $\sim 8 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$ );  $v_i$  и  $v_e$  — скорости движения ионов и электронов;  $\epsilon_d$  — энергия девозбуждения метастабильного атома гелия ( $\text{He}^{23}\text{S}$ ,  $\epsilon_d = 19,8 \text{ эВ}$ ).

Плотность метастабильных атомов равна примерно 3/4 плотности рекомбинируемых электронов:

$$n_m \sim \frac{3}{4} \frac{dn_e}{dt}. \quad (7.112)$$

При низком давлении газа ( $p_0 \leq 4 \cdot 10^{-3} \text{ мм рт. ст.}$ ) метастабильные атомы свободно движутся к стенкам, где происходит их разрушение. В этом случае

$$n_m = \frac{1}{n_e \sigma_e v_e + v_i/d} \frac{3}{4} \frac{dn_e}{dt}, \quad (7.113)$$

$d$  — диаметр разрядной трубки.

Если давление газа относительно высоко ( $p_0 \geq 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ мм рт. ст.}$ ), метастабильные атомы исчезают благодаря диффузии к стенкам. Тогда

$$n_m = \frac{1}{n_e \sigma_e v_e + (0,48 v_0/d^2 n_0 \sigma_k)} \frac{3}{4} \frac{dn_e}{dt}, \quad (7.11)$$

где  $\sigma_k$  — сечение диффузии метастабильных атомов ( $3,4 \times 10^{-15} \text{ см}^2$ ).

На рис. 42 сопоставлены опытные и вычисленные зависимости  $n_e$  и  $T_e$  от времени. В начале распада плазмы  $n_e$  меняется экспоненциально со временем. Однако, когда  $T_e \rightarrow T_{\text{газ}}$ , наступает излом в ходе изменения  $n_e$  со временем.

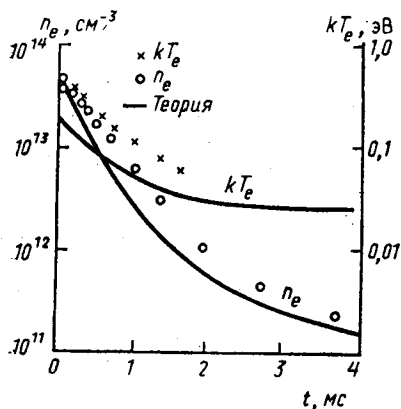


Рис. 42. Зависимость  $n_e$  и  $T_e$  от времени для разряда в гелии ( $p_{\text{He}} = 4$  мм рт. ст.)

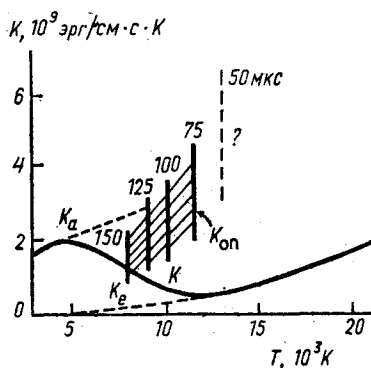


Рис. 43. Зависимость от температуры коэффициента теплопроводности плазмы, вычисленного по уравнению (7.119) (сплошная линия). Опытное значение  $K_{\text{он}}$  получается из уравнения (7.118), когда величина  $R(r, t)$  мала

Модель распада электронной энергии, рассмотренная Куксом и сотр. применима к послесвечению в стеллараторах, ограниченному магнитным полем, при низких плотностях газа.

## 2. Учет диффузии частиц

Положение становится иным в относительно более плотной плазме, в которой температура атомов оказывается зависящей от температуры электронов. Как показали Купер и Канкель, в плотной водородной плазме ( $p_0 \geq 0,1$  мм рт. ст.,  $T_e = 10^4$  К), ограниченной радиальным магнитным полем, распад плазмы происходит главным образом благодаря радиальному переносу энергии, сопровождающемуся рекомбинацией в объеме.

В отсутствие массового потока (конвекции) и электрического тока (омического нагрева) уравнение энергетического баланса может быть записано в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla Q = R, \quad (7.115)$$

где  $\varepsilon$  — плотность энергии;  $Q$  — вектор потока энергии частиц;

$R$  — скорость чистого поглощения излучаемой энергии в единице объема. В качестве хорошего приближения для атомов водорода можно записать

$$\varepsilon = \varepsilon_1^H n_e + \frac{3}{2} (n_+ + n_e) kT, \quad (7.116)$$

где  $\varepsilon_1^H = 13,6$  эВ — энергия ионизации H-атомов;  $n_+$  — начальная плотность протонов, т. е. величина постоянная. Следовательно, главную часть скорости распада составляет величина  $\varepsilon_1^H \frac{\partial n_e}{\partial t}$ .

Вектор потока энергии частиц равен

$$Q = -K(T) \nabla T, \quad (7.117)$$

поскольку перенос зависит от взаимной диффузии различных компонент. Если радиальная диффузия подавляется магнитным полем, то уравнение (7.115) приобретает вид

$$\begin{aligned} \left( \varepsilon_1^H + \frac{3}{2} kT \right) \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{3}{2} (n_+ + n_e) k \frac{\partial T}{\partial t} = \\ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} rK(r, t) \frac{\partial T}{\partial r} + R(r, t), \end{aligned} \quad (7.118)$$

где  $K(r, t)$  — локальный коэффициент теплопроводности плазмы. В соответствии с упрощенной моделью кинетической теории можно принять

$$\begin{aligned} K \approx \sum_i K_i = \frac{75}{256} k (8\pi kT)^{1/2} \times \\ \times \sum_j N_j \left[ \sum_i \sigma_{i,j} n_i \left( \frac{m_j m_i}{m_j + m_i} \right)^{1/2} \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (7.119)$$

где суммирование выполнено для трех разновидностей частиц: атомов ( $a$ ), ионов ( $i$ ) и электронов ( $e$ ).

Когда вклад свободных электронов значителен, величина  $K_e$  очень близка к таковой для полностью ионизованного газа. Вклад  $K_i$  всегда меньше  $K_e$ , и поэтому величина  $K$  зависит только от  $K_e$  и  $K_a$ .

Используя в качестве первого приближения значения  $\sigma_{aa} = 10^{-15}$  см<sup>2</sup> и  $\sigma_{i,a} = 5 \cdot 10^{-15}$  см<sup>2</sup> для резонансной перезарядки, Купер и Канкель из опытных значений  $n_e$  и  $T_e$  определили  $K(r, t)$  как функцию  $t$  и  $T_e$  (рис. 43). Из рисунка видно, что скорость распада энергии существенно выше, чем можно было ожидать из кинетического переноса тепла (благодаря теплопроводности). Вклад излучения  $R(r, t)$ , т. е. радиационный перенос тепла, оценить весьма трудно, поскольку коэффициенты испускания и поглощения являются быстро меняющимися

функциями не только положения и времени, но и частоты излучения.

В то же время полученные опытные значения коэффициентов распада оказываются ближе к значениям  $\gamma$ , вычисленным по уравнениям Бэйтса и сотр. для модели плазмы, оптически толстой по отношению к линиям Лаймана (рис. 44), чем к значениям  $\gamma$ , вычисленным для модели оптически тонкой плазмы.

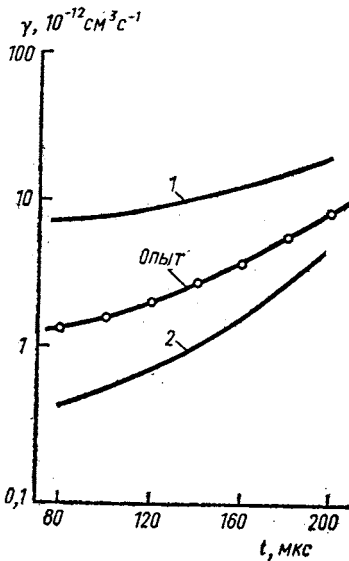


Рис. 44. Зависимость коэффициента распада  $\gamma$  от времени: 1 — оптически тонкая плазма; 2 — плазма, оптически толстая по отношению к линиям Лаймана

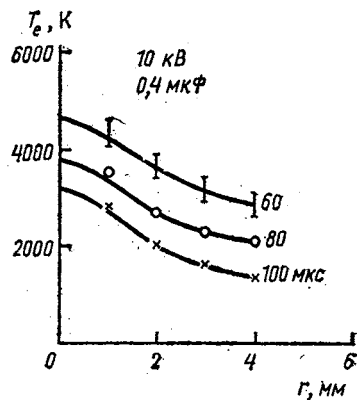


Рис. 45. Зависимость электронной температуры от радиуса в гелиевой плазме через 36 мкс после выключения разряда ( $p_{\text{He}}=7$  мм рт. ст.)

В более плотной плазме ( $p_{\text{He}}=3,8$  мм рт. ст. или  $p_{\text{Ar}}=0,2-0,8$  мм рт. ст.) Гусинов и сотр. наблюдали пространственную неоднородность температуры в послесвечении (рис. 45).

Градиент температуры при относительно высокой плотности электронов ( $10^{14}-10^{15}$  см $^{-3}$ ) оказался совсем неожиданным, поскольку из уравнения энергетического баланса

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} n_e k T_e \right) = \nabla (\kappa \nabla T_e) = -k T_e / l_T^2 \quad (7.120)$$

следовало выравнивание неоднородности  $T_e$  при заданных условиях за  $10^{-7}$  с. В уравнении (7.120), где  $l_T$  — характеристическая длина теплопроводности, равная

$$l_T (\pi \kappa t)^{1/2}; \quad (7.121)$$

$\kappa$  — коэффициент температуропроводности, равный для электронов:

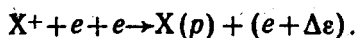
$$\kappa = K/5n_e k \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}; \quad (7.122)$$

$K$  — коэффициент теплопроводности.

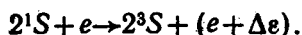
Существовавший градиент температуры в послесвечении газа мог быть обусловлен следующими механизмами нагрева и охлаждения плазмы:

### Нагрев

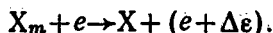
а. Рекомбинационный нагрев:



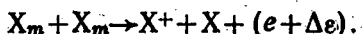
б. Синглет-триплетная сверхупругая конверсия в гелии:



в. Сверхупругие переходы из метастабильного состояния в основное:



г. Соударения метастабильных атомов:



### Охлаждение

а. Термодиффузия:  $\nabla \kappa \nabla T_e$ ,

где  $\kappa$  — коэффициент температуропроводности.

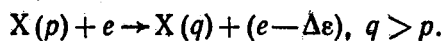
б. Диффузное охлаждение  $\nabla D_a \nabla n_e$ ,

где  $D_a$  — эффективный коэффициент амбиполярной диффузии.

в. Электронно-атомные и электронно-ионные упругие соударения:

$$-\frac{2m}{M} (v_{ea} + v_{ei}) \frac{3}{2} n_e k (T_e - T_g).$$

г. Неупругие столкновения:



Расчеты показали, что преобладающим процессом нагрева является рекомбинационный нагрев ( $\sim 2$  эВ на один процесс), преобладающим процессом охлаждения — термодиффузия.

## § 9. КИНЕТИКА ИОНИЗАЦИИ МОЛЕКУЛЯРНОГО ВОДОРОДА В ПЛАЗМЕ ИМПУЛЬСНОГО РАЗРЯДА

В отличие от многочисленных работ по ионизации водорода в низкотемпературной плазме, в которых исследуется атомная

водородная плазма, рассмотрим кинетику процесса с учетом диссоциации и ионизации молекулы  $H_2^1$ .

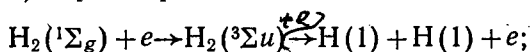
В качестве параметров для расчетов выберем значения  $T_{e,0}$ ,  $\rho_0$  и  $\alpha_0$  (начальная степень ионизации), типичные для импульсного разряда:  $T_e=1,3; 1,5$  - и  $2$  эВ;  $\alpha_0=0,001$  и  $0,01$ ;  $\rho_0=0,0001; 0,001; 0,01; 0,1$  и  $1$  атм при  $273$  К.

Анализ возможных элементарных процессов в водородной плазме начнем с рассмотрения реакций с участием молекулярных частиц. Число таких процессов достаточно велико, их константы скорости сильно различаются по величине, а некоторые из них пренебрежимо малы в наших условиях.

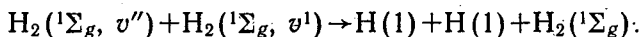
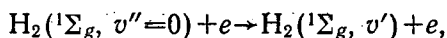
Перечислим наиболее важные процессы с участием молекулярных частиц, имеющие место в высокоионизованной низкотемпературной водородной плазме (согласно данным Дравина).

1. Диссоциация. Возможны два различных механизма:

а) через первое отталкивательное состояние

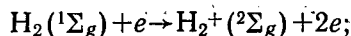


б) при столкновении двух молекул в возбужденных колебательных состояниях

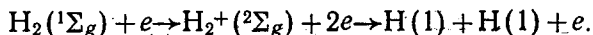


2. Образование ион-электронных пар:

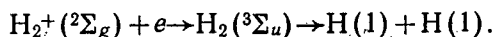
а) путем прямой ионизации основного электронного состояния



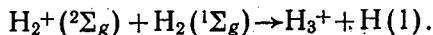
б) в двухступенчатом процессе



3. Диссоциативная рекомбинация:



4. Образование иона  $H_3^+$ :



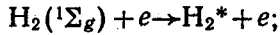
5. Образование возбужденных молекул<sup>2</sup>:

а) прямое возбуждение при электронных столкновениях

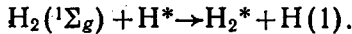
<sup>1</sup> По результатам кандидатской диссертации Л. Р. Парбузиной «Физико-химические процессы в азотно-водородной плазме импульсного разряда» (МГУ, химический факультет, 1982).

<sup>2</sup> Электронное состояние возбужденной молекулы  $H_2$  в работе не указано.

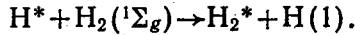
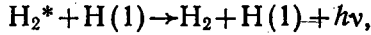




- б) передача возбуждения через атом-молекулярные столкновения



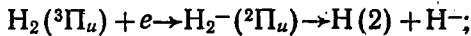
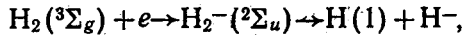
6. Распад возбужденных атомов и молекул при столкновениях с атомами или молекулами в основном состоянии или при испускании кванта:



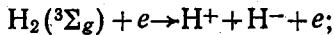
7. Рекомбинация ионов  $\text{H}_2^+$  и  $\text{H}^+$ . Этот процесс в основном происходит на стенках реактора.

8. Образование иона  $\text{H}^-$ :

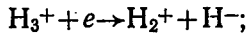
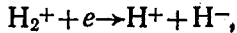
- а) диссоциативное прилипание электрона



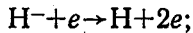
- б) полярная диссоциация



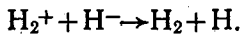
- в) диссоциативная рекомбинация



- г) столкновительное «отлипание» электрона

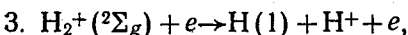
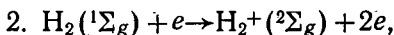
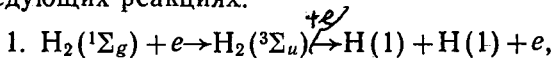


- д) нейтрализация

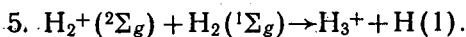
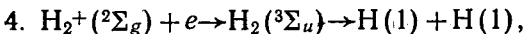


Как было установлено в результате предварительных расчетов, образование иона  $\text{H}^-$  в области выбранных нами значений  $T_e$  и  $p_0$  несущественно.

После тщательного анализа значений констант скорости оставшихся процессов для выбранных условий остановимся на следующих реакциях:

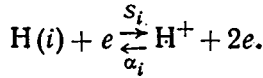


(7.123)

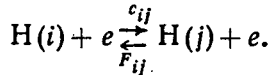


Рассмотрим теперь процессы, приводящие к изменению населенностей основного и возбужденных уровней атома водорода (согласно данным Капителли с сотр.).

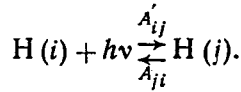
1. Ударная ионизация атомов и тройная рекомбинация ионов:



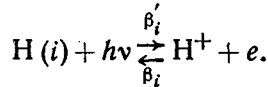
2. Ударное возбуждение и девозбуждение атомов:



3. Фотовозбуждение и спонтанное девозбуждение атомов:

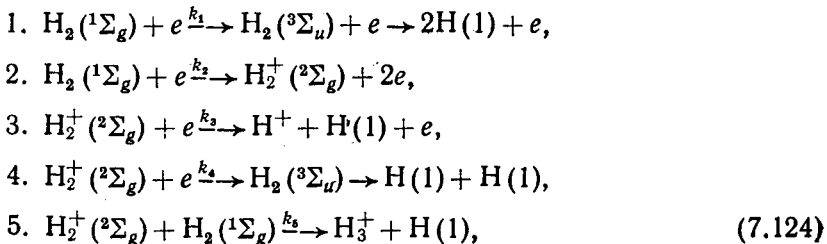


4. Фотоионизация и излучательная рекомбинация:



Здесь  $\text{H}(i)$  — атомы водорода в  $i$ -м энергетическом состоянии, над стрелками указаны обозначения соответствующих констант скорости процесса. Поскольку мы рассматриваем случай оптически тонкой плазмы, а процесс фотовозбуждения эквивалентен проблеме реабсорбции линий, то его учитывать не будем. Процесс фотоионизации соответствует поглощению света и зависит от геометрических размеров плазмы. Оценка поглощения в нашем случае показала, что, даже если излучение пересекает плазму по самому длинному пути, пропускаемость оптически тонкой плазмы составляет  $\sim 93\%$ , т. е. фотоионизация пренебрежительно мала.

Поэтому для экспериментальных условий импульсного разряда можно практически пренебречь двумя процессами: фотоионизацией и фотовозбуждением. Ниже представлена полная кинетическая схема ионизации водорода в импульсном разряде.



$$6. \text{H}(i) + e \xrightleftharpoons[\alpha_i]{S_i} \text{H}^+ + 2e,$$

$$7. \text{H}(i) + e \xrightleftharpoons[F_{ij}]{c_{ij}} \text{H}(j) + e,$$

$$8. \text{H}^+ + e \xrightarrow{\beta_j} \text{H}(j) + h\nu, \quad i < j,$$

$$9. \text{H}(j) \xrightarrow{A_{ij}} \text{H}(i) + h\nu.$$

Значения констант скорости  $k_1—k_5$  для исследуемых температур приводятся в работах Капителли и сотр. Величины  $S_i$  и  $\beta_i$  рассчитывались по полуэмпирическим формулам, взятым из работы Дравина и Эмарда;  $\alpha_i$  рассчитывается в соответствии с принципом детального равновесия:

$$K_i(T_e) = S_i/\alpha_i,$$

где  $K_i(T_e)$  — константа равновесия для  $i$ -го уровня при температуре  $T_e$ , ее вид известен (см., например, книгу Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера). Коэффициенты  $c_{ij}$  и  $F_{ji}$  также были рассчитаны по эмпирическим формулам, взятым из книги Л. А. Вайнштейна и сотр., а коэффициенты  $A_{ij}$  заимствованы из книги Аллена.

Предложенная нами (совместно с Л. Р. Парбузиной) кинетическая модель дает обоснованное приближение, достаточно хорошо отражающее реальную ситуацию в плазме импульсного разряда в среде молекулярных газов. Обозначим через  $n_{\text{H}_1}$ ,  $n_{\text{H}_2^+}$ ,  $n_{\text{H}^+}$ ,  $n_e$  концентрации соответствующих компонентов плазмы, через  $n_i$  — концентрацию атомов водорода на  $i$ -м электронном уровне, через  $t$  — время в секундах. Тогда система дифференциальных уравнений, соответствующая кинетической схеме, будет иметь вид

$$\begin{aligned} dn_{\text{H}_1}/dt &= -(k_1 + k_2)n_{\text{H}_1}n_e - k_5n_{\text{H}_1}n_{\text{H}_2^+}, \\ dn_{\text{H}_2^+}/dt &= -(k_3 + k_4)n_{\text{H}_2^+}n_e - k_5n_{\text{H}_1}n_{\text{H}_2^+} + k_2n_{\text{H}_1}n_e, \\ dn_{\text{H}^+}/dt &= k_3n_{\text{H}_2^+}n_e + \sum_{i=1}^{\infty} S_i n_i n_e - \left[ \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i + \alpha_i n_e) \right] n_{\text{H}^+} n_e, \quad (7.125) \\ dn_1/dt &= 2k_1n_{\text{H}_1}n_e + (k_3 + 2k_4)n_{\text{H}_2^+}n_e + k_5n_{\text{H}_2^+}n_{\text{H}_1} + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} A_{k1}n_k + \left\{ \sum_{k=2}^{\infty} F_{k1}n_k + (\beta_1 + \alpha_1 n_e)n_{\text{H}^+} - \left( S_1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} \right) n_1 \right\}. \end{aligned}$$

$$dn_j/dt = \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} c_{ij} n_i + \sum_{k=j+1}^{\infty} F_{kj} n_k + (\beta_j + \alpha_j n_e) n_{H^+} - \right. \\ \left. - \left( \sum_{k=j+1}^{\infty} c_{kj} + \sum_{i=1}^{j-1} F_{ji} + S_i \right) n_j \right\} + \sum_{k=j+1}^{\infty} A_{kj} n_k - \sum_{i=1}^{j-1} A_{ji} n_i.$$

Для численного решения удобно перейти к другим переменным, поэтому разделим концентрации всех компонентов на начальное число атомов в системе, т. е. на  $N_0 = 2[H_2]_0$ . Тогда относительные концентрации будут безразмерными и меняются от 0 до 1. После такого преобразования получим приведенное время  $\tau = tN_0$  (см<sup>-3</sup>·с). Новые обозначения приобретут вид

$$x_2 = n_{H^+}/N_0, \quad x_2 = n_{H_2^+}/N_0, \quad x_3 = n_{H^+}/N_0, \quad x_e = n_e/N_0, \quad u_i = n_i/N_0.$$

Представим группу уравнений заселения отдельных уровней в более удобной форме:

$$\frac{du_j}{d\tau} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} u_i + \delta_j.$$

Здесь  $a_{ij}$  — столкновительно-излучательные частоты реакций;  $\delta_j$  — скорость рекомбинации на уровень  $j$ :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= c_{ij} x_e, \quad i < j, \\ a_{ij} &= A_{ij} + F_{ij} x_e, \quad i > j, \\ a_{ii} &= - \left( \sum_{h < i} a_{hi} + \sum_{k > i} a_{ki} + S_i n_e \right), \\ \delta_j &= (\beta_j + \alpha_j n_e) x_3 x_e. \end{aligned} \quad (7.126)$$

Окончательно система (7.125) сведется к виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(k_1 + k_2) x_1 x_e - k_5 x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(k_3 + k_4) x_2 x_e - k_5 x_1 x_2 + k_2 x_1 x_e, \\ \dot{x}_3 &= k_3 x_2 x_e + \sum_{i=1}^{\infty} S_i u_i x_e - \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i + \alpha_i x_e N_0) x_3 x_e, \\ \dot{u}_1 &= 2k_1 x_1 x_e + (k_3 + 2k_4) x_2 x_e + k_5 x_1 x_2 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} u_i + \delta_1, \end{aligned} \quad (7.127)$$

$$\dot{u}_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} u_i + \delta_j,$$

$$\dot{x}_e = \dot{x}_2 + \dot{x}_3.$$

Обозначая через  $\alpha_0$  начальную степень ионизации, получим следующие граничные условия для системы (7.127):

$$\text{при } \tau=0 \quad x_1^0 = (1-\alpha_0)/2, \quad x_3^0 = x_e^0 = \alpha_0. \quad (7.128)$$

Численные расчеты с использованием алгоритма Гира проведены для электронных температур  $T_e$ : 1,3; 1,5 и 2 эВ, начальное давление водорода варьировалось от  $10^{-4}$  до 1 атм, начальная степень ионизации  $\alpha_0$  — от 0,001 до 0,01. Эти условия приблизительно соответствуют импульсному разряду с квазипрямоугольной формой токового импульса.

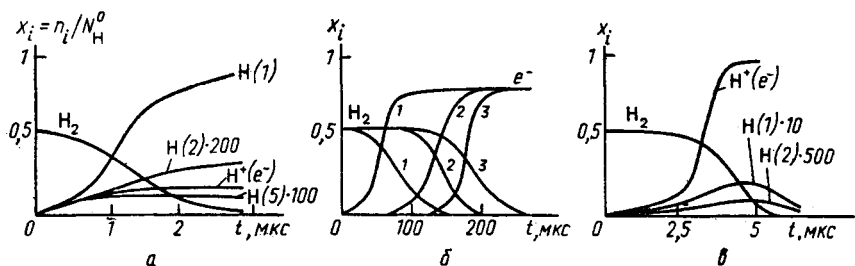


Рис. 46. Кинетические кривые ионизации молекулярного водорода: а —  $T_e = 1,3$  эВ,  $p_0 = 0,1$  атм,  $\alpha_0 = 1\%$ ; б —  $T_e = 1,3$  эВ;  $p_0 = 0,001$  атм при разных значениях  $\alpha_0$  (1 —  $1\%$ , 2 —  $0,1\%$ , 3 —  $0,05\%$ ); в —  $T_e = 2,0$  эВ,  $p_0 = 0,001$  атм,  $\alpha_0 = 1\%$

Типичные кинетические кривые изображены на рис. 46. Как видно из рисунка, поведение компонентов плазмы сложным образом зависит от трех основных параметров: начальной степени ионизации  $\alpha_0$ , температуры  $T_e$  и начальной плотности частиц (давление водорода  $p_0$ ).

При увеличении температуры  $T_e$  все процессы значительно ускоряются (ср. рис. 46, б, в). Кроме того, при  $p = \text{const}$  происходит увеличение предельных значений  $x_{H^+}$  ( $x_e$ ). Так, при изменении  $T_e$  от 1,3 до 2,0 эВ ( $p_0 = 1$  атм)  $x_{H^+}$  возрастает на порядок.

При  $T_e = \text{const}$  уменьшение  $p_0$  приводит к возрастанию  $x_{H^+}$  ( $x_e$ ), так что при  $T_e = 2$  эВ и  $p_0 < 0,01$  атм  $x_{H^+} \sim 1$ . Относительная концентрация атомов водорода в основном состоянии падает при уменьшении  $p_0$  (см. рис. 46, а, в). Аналогично меняется и населенность возбужденных уровней атомов водорода.

При повышении степени ионизации и понижении давления на кривых  $N_i(t)$  появляются максимумы (см. рис. 46, в). Это связано прежде всего с сильным уменьшением вклада рекомбинационных процессов.

## § 1. МОДЕЛЬ ЛОКАЛЬНОГО ТЕРМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ (ЛТР)

## Критерии применимости модели ЛТР

**Введение.** Для того чтобы по измеряемым в плазме величинам, например, по интенсивностям спектральных линий или континуума или по ширине линий, определить некоторые параметры плазмы, положим ее температуру, необходимо знать не только плотности электронов, атомов и ионов в различных возбужденных состояниях, но и в общем случае вероятности столкновительных и излучательных процессов ионизации и рекомбинации, возбуждения и девозбуждения, форму линий и коэффициенты поглощения. В плотных плазмах для расчета спектра надо дополнительно решать уравнение радиационного переноса. В оптически тонких плазмах последняя проблема отсутствует.

Расчет спектров значительно упрощается при наличии локального термодинамического или термического (как его обычно называют в применении к оптически тонкой плазме) равновесия в плазме, когда нет необходимости в знании вероятностей переходов, формы линий и коэффициентов поглощения, поскольку в этом случае имеет место баланс обратимых столкновительных процессов в соответствии с принципом детального равновесия.

**Локальное термическое равновесие.** Если распределение атомов и ионов по различным связанным состояниям, по кратности ионизации и по скоростям в данной точке плазмы в данный момент времени такое же, как и в системе с термодинамическим равновесием при тех же значениях температуры, массовой плотности и химического состава, говорят о наличии в плазме полного локального термодинамического равновесия.

В этом случае распределение тяжелых частиц и электронов по скоростям описывается уравнением Максвелла, например для электронов:

$$dn_v = 4\pi n_e \left( \frac{m}{2\pi kT_e} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT_e}} v^2 dv, \quad (8.1)$$

где  $n_e$  — плотность электронов ( $\text{см}^{-3}$ ).

Распределение атомов и ионов по связанным состояниям задается уравнением Больцмана

$$\frac{n(p)}{n(q)} = \frac{g(p)}{g(q)} e^{-\frac{\epsilon_{p,q}}{kT_e}}, \quad (8.2)$$

где  $p$  и  $q$  — значения главных квантовых чисел (номера возбужденных состояний),  $g(p)$  и  $g(q)$  — их статистические веса и  $\epsilon_{p,q}$  — энергия перехода между состояниями  $p$  и  $q$ .

Распределение ионов по кратности ионизации выражается уравнением Саха

$$\frac{n_z n_e}{n_{z-1}} = \frac{2g_z}{g_{z-1}} \left( \frac{2\pi m k T_e}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon_{\text{ион}}}{kT_e}}, \quad (8.3)$$

где  $\epsilon_{\text{ион}}$  — потенциал ионизации атома ( $z=1$ ) или иона ( $z \geq 2$ ) из основного состояния;  $z-1$  и  $z$  — кратность (заряд) ионов (в спектроскопии плазмы принято считать для нейтральных атомов  $z=1$ ).

Плазма в состоянии термодинамического равновесия излучает как черное тело. Спектральная плотность излучения  $\rho_\lambda$  в интервале длин волн от  $\lambda$  до  $\lambda+d\lambda$  в соответствии с формулой Планка равна

$$\rho_\lambda = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k T}\right) - 1}. \quad (8.4)$$

В лабораторной низкотемпературной плазме, которая обычно является оптически тонкой, не выполняются условия абсолютного черного тела, и формула Планка (8.4) в этом случае неприменима. Оптически тонкой плазмой называют плазму с оптической толщиной  $\tau(\nu) \ll 1$  (например, с  $\tau(\nu) \leq 0,1$ ), причём

$$\tau(\nu) = \int \kappa_\nu \rho dl. \quad (8.5)$$

В однородной плазме  $\tau(\nu) = \kappa_\nu \rho l$ , где  $\kappa_\nu$  — массовый коэффициент поглощения,  $\rho$  — плотность вещества,  $l$  — толщина слоя в направлении наблюдения.

В связи с этим плазму, в которой выполняются условия (8.1)–(8.3), но не выполняется условие (8.4), рассматривают находящейся в локальном термическом равновесии.

**Частичное локальное термическое равновесие.** Кинетические расчеты Бейтса, Кингстона и Макуиртера, а позднее и Дравина показали, что в оптически тонкой плазме, даже при относительно высоких плотностях электронов, уравнение Саха неприменимо к основному состоянию атомов (или ионов). Однако, как показали Макуиртер и Хирн, для возбужденных состояний это уравнение может быть использовано при относительно низких плотностях электронов (рис. 47). Величины  $a$  и  $b_n$  определяются следующими соотношениями:

$$a = n_1/n_1^{eq}; \quad b_n = \frac{n_i/n_1}{n_i^{eq}/n_1^{eq}}, \quad (8.6)$$

где индексы  $i$  и  $1$  относятся к главному квантовому числу,

через « $eq$ » обозначены населенности в состоянии ЛТР, определяемые по  $T_e$  и  $n_e$ .

Плазма будет находиться в состоянии частичного ЛТР, если населенность возбужденных уровней, вплоть до уровня  $j$  (сверху вниз), будет на 90% или более определяться уравнением Саха. Это имеет место, если, по Гриму, радиационный распад с уровня  $j$  или более высокого уровня будет в 10 раз менее вероятен, чем столкновительные процессы заселения этого уровня.

Макуиртер первым ввел понятие столкновительно-излучательного предела для уровня  $j$ , выше которого связанные сос-

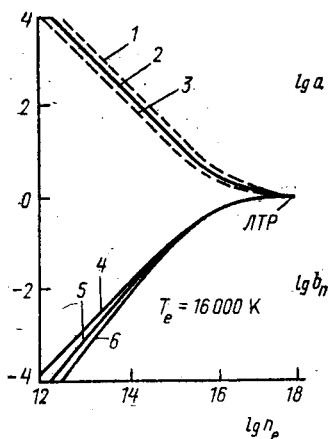


Рис. 47. Частичное локальное термическое равновесие в водородной плазме при разных  $T_e$ , К (1 — 64000; 2 — 16000; 3 — 4000) и номерах уровней  $i$  (4 — 2; 5 — 3; 6 — 15)

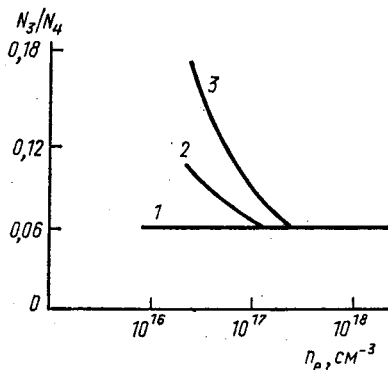


Рис. 48. Относительное заселение состояний с  $i=3$  и 4 ионов O II: 1 — по результатам опытов Берга; 2 — по теории Гримма; 3 — по теории Макуиртера

тояния находятся в равновесии между собой и с континуумом. При низких плотностях электронов этот предел очень близок к порогу ионизации. По мере повышения плотности электронов предел уменьшается до тех пор, пока при некотором значении не достигнет основного состояния. Тогда ко всем состояниям будут применимы уравнения Больцмана и Саха.

Для водорода и водородоподобных ионов Грим вычислил значение  $j$  как функцию плотности  $n_e$  и температуры  $T_e$  электронов и заряда ядра  $z$ . Условию частичного ЛТР, по Гриму, должна удовлетворять минимальная плотность электронов в соответствии с соотношением

$$n_e \geq \frac{10}{2\pi^{1/2}} \frac{z^7}{j^{17/2}} \frac{\alpha}{a_0} \left( \frac{kT_e}{z^2 e_H^1} \right)^{1/2} \text{ см}^{-3}, \quad (8.7)$$



где  $a_0$  — борковский радиус;  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры;  $\varepsilon_1^H$  — потенциал ионизации атома водорода или водородоподобного иона, когда  $z^2\varepsilon_1^H = z^2e^2/2a_0$ . Частичное ЛТР наблюдается вплоть до  $i=2$  (первый возбужденный уровень): а) для водорода с  $T_e=1$  эВ при  $n_e \geq 6 \cdot 10^{15}$  см $^{-3}$ ; б) для гелия с  $T_e=4$  эВ при  $n_e \geq 7 \cdot 10^{17}$  см $^{-3}$ .

Берг определил населенность однократно заряженного иона O II в состояниях с  $i=2, 3, 4$  при 24600 К и различных плотностях электронов. На рис. 48 приведены результаты опытов и расчетов населенностей уровней 3 и 4. В качестве подходящего эффективного заряда иона O II выбрано значение  $z_{\text{эф}}=1,6$ . Из рисунка видно, что для энергетических уровней иона O II нет заметных отклонений от ЛТР даже при меньших плотностях электронов, чем это должно было бы наблюдаться по теориям Грима и Макуиртера в «водородном» приближении.

Дравин ввел квантово-механические поправки  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  к классическим выражениям Грима, так что для водородоподобных ионов условиями частичного ЛТР в плазме являются следующие:

$$n_e \geq 7,4 \cdot 10^{18} \frac{z^7}{j^{17/2}} \left( \frac{kT_e}{z^2\varepsilon_1^H} \right)^{1/2} \left\{ \begin{array}{l} [\Psi_1(2u_1/j^3)]^{-1} \text{ см}^{-3}, \text{ для атомов} \\ [\Psi_2(2u_1/j^3)]^{-1} \text{ см}^{-3}, \text{ для ионов,} \end{array} \right. \quad (8.8)$$

где  $u_1 = z^2\varepsilon_1^H/kT_e$ . Это уравнение приводит к более высоким плотностям (примерно в четыре раза) электронов, чем критерий Грима уравнения (8.7), при малых и средних квантовых числах  $j$  и к меньшим плотностям (примерно на порядок) электронов при высоких квантовых числах ( $j > 8$ ).

**Полное локальное термическое равновесие.** Полное ЛТР имеет место в оптически тонкой плазме, по Гриму, если скорость столкновительного заселения основного уровня, по крайней мере, в 10 раз выше, чем скорость радиационного распада верхнего уровня резонансной линии. Это осуществляется при выполнении условия

$$n_e \geq \frac{5}{8\pi^{1/2}} z^7 \left( \frac{\alpha}{a_0} \right)^3 \left( \frac{kT_e}{\varepsilon_1^H} \right)^{1/2} \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1^H} \right)^3 \text{ см}^{-3}, \quad (8.9)$$

или

$$n_e \geq 9,2 \cdot 10^{17} z^7 \left( \frac{kT_e}{\varepsilon_1^H} \right)^{1/2} \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1^H} \right)^3 \text{ см}^{-3}.$$

Для водорода, например с  $T_e=1$  эВ, полное ЛТР достигается при  $n_e \geq 10^{17}$  см $^{-3}$ . На рис. 49—50 показаны результаты измерений температур, выполненных В. Н. Колесниковым в свободно горящей дуге в аргоне и гелий при атмосферном давлении. Различия в температурах, проявляющиеся при малых плотнос-

тях электронов, исчезают в аргоне при  $n_e > 8 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$  (при  $I \geq 12 \text{ А}$ ), в гелии при  $n_e > 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  (при  $I \geq 200 \text{ А}$ ).

Дравин показал, что для полного ЛТР в плазме вместо разницы  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$  в уравнении (8.9) надо ввести максимальную разницу  $\Delta\varepsilon_{\text{макс}} = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$  между двумя соседними уровнями для данного атома или иона. В водороде и гелии эта разница отвечает энергии перехода между основным и первым возбужденным уровнями. Однако существует много систем, которые отк-

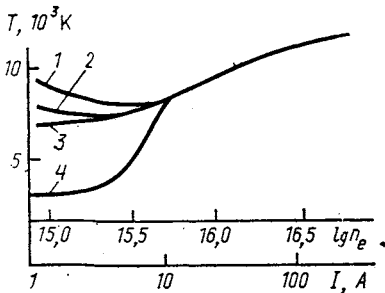


Рис. 49. Температуры, измеренные в аргонной плазме с небольшими добавками водорода (свободно горящая дуга при 1 атм): 1 —  $T_e$  из относительных измерений тормозного излучения; 2 —  $T_{\text{возб}}$  из уровней аргона относительно основного состояния; 3 —  $T_{\text{ион}}$  из формулы Саха; 4 —  $T_{\text{распр}}$  из населенностей высоколежащих уровней (по Больцману),  $T_{\text{распр}}$  совпадает с  $T_{\text{газ}}$

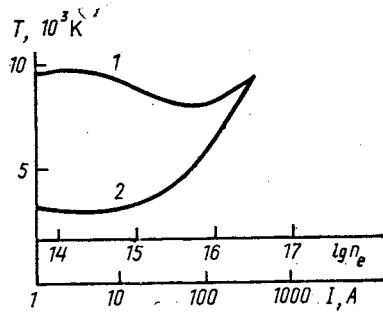


Рис. 50. Температуры, измеренные в гелиевой плазме с 5% неона и небольшими добавками водорода: 1 —  $T_e$ ; 2 —  $T_{\text{распр}}$

лоняются от этого правила. Так, например, O II имеет  $\Delta\varepsilon_{\text{макс}} = \varepsilon_4 - \varepsilon_3 = 10 \text{ эВ}$ , тогда как  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 3,3 \text{ эВ}$  и  $\varepsilon_3 - \varepsilon_2 = 1,7 \text{ эВ}$ .

С учетом квантово-механических поправок Дравин получил следующие условия применимости полного ЛТР в оптически тонкой плазме:

$$n_e \geq 6,5 \cdot 10^{16} \frac{g_{\text{макс}}}{g_{\text{макс}-1}} \left( \frac{\varepsilon_{\text{макс}} - \varepsilon_{\text{макс}-1}}{\varepsilon_1^{\text{H}}} \right)^3 \left( \frac{kT_e}{\varepsilon_1^{\text{H}}} \right) \times \begin{cases} \Phi_1(\Delta u_{\text{макс}}) \text{ см}^{-3}, & \text{для атомов} \\ \Phi_2(\Delta u_{\text{макс}}) \text{ см}^{-3}, & \text{для ионов,} \end{cases} \quad (8.10)$$

где  $\Delta u_{\text{макс}} = (\varepsilon_{\text{макс}} - \varepsilon_{\text{макс}-1}) / kT_e$ .

Численные значения  $n_e$ , найденные по уравнению (8.10), отличаются от более ранних результатов других авторов не более чем в 3—4 раза. Однако температурная зависимость получается

иной, что обусловлено использованием для расчета поперечных сечений элементарных столкновительных процессов возбуждения и ионизации не классических формул Ситона и Томсона, а других — квантово-механических выражений.

В оптически толстой плазме ( $\tau(\nu) \gg 1$ ), например при сильном поглощении в резонансных линиях Лаймана, полное ЛТР будет иметь место при меньших плотностях электронов, чем в оптически тонкой плазме, т. е. по Гриму — при условии

$$n_e \geq 10^{17} z^7 \left( \frac{kT_e}{\varepsilon_1^H} \right)^{1/2} \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1^H} \right)^3 \text{ см}^{-3}. \quad (8.11)$$

В то же время условия применимости частичного ЛТР по плотности электронов (ур. 8.7, 8.8), даже при сильном резонансном поглощении излучения, меняются ( $n_e$  уменьшается) не более чем в два раза.

**Нестационарная однородная плазма.** В нестационарной однородной плазме модель частичного ЛТР применима, если в дополнение к неравенствам (8.7), (8.8) выполняется условие постоянства температуры за времена установления равновесного распределения по связанным состояниям (процессы ионизации и рекомбинации) при столкновениях тяжелых частиц с электронами. Для водорода при  $kT_e = 1$  эВ и  $n_e = 10^{16} \text{ см}^{-3}$   $\tau_{\text{возб}} = 3$  мкс, для ионизованного гелия при  $kT_e = 4$  эВ и  $n_e = 10^{18} \text{ см}^{-3}$   $\tau_{\text{возб}} = 0,3$  мкс и  $\tau_{\text{ион}} = 10^{-3}$  мкс, т. е. на много меньше времени изменения макроскопических характеристик плазмы. Следовательно, нестационарная природа плазмы редко вызывает отклонения от частичного ЛТР между возбужденными состояниями и свободными электронами.

Совсем по-иному обстоит дело с высокотемпературной нетермической плазмой, когда кинетические температуры различных компонент плазмы могут значительно отличаться друг от друга.

Условие полного ЛТР выполняется в нестационарной однородной плазме, если время существования плазмы больше времени релаксации основного уровня:

$$\tau_{z-1,1} \approx [1,3n_e \langle \sigma^{(e)} v_e \rangle_{1-2}]^{-1} \quad (8.12)$$

и больше времени существования возбужденных уровней:

$$\tau_{z-1,1} \approx \left[ n_e \langle \sigma^{(e)} v_e \rangle_{j \rightarrow j-1} + \sum_{i \rightarrow j} A_{ji} \right]^{-1}. \quad (8.13)$$

При низкой плотности электронов релаксация определяется в основном вероятностями спонтанных переходов (коэффициентами Эйнштейна).

**Неоднородная стационарная плазма.** В неоднородной стационарной плазме градиенты плотности и температуры будут вызывать диффузионные потоки разного вида. Если скорость диффузии велика и диаметр плазменной колонны мал, релак-

сационные явления могут привести к пространственному распределению частиц по плотностям и кратностям ионизации.

Более чувствительными к их неоднородностям будут основные уровни частиц, так как поперечные сечения их заселения гораздо меньше, чем у высоковозбужденных уровней. Если характеристическая длина плазмы  $l$  (диаметр колонны или доля диаметра) больше средней длины диффузии  $l_D$ , определяемой по формуле Эйнштейна

$$l_D = (\tau_{z-1,1} D_{z-1,1})^{1/2}, \quad (8.14)$$

то можно пренебречь пространственной релаксацией основного уровня. (Средней длиной диффузии в плазме называют расстояние, которое проходят частицы в основном состоянии, прежде чем они придут в равновесие с электронами.)

Поскольку для полного ЛТР в плазме требуется высокая плотность электронов, более важными в неоднородной плазме будут столкновения между ионами и атомами (резонансная перезарядка) и столкновения между ионами. Коэффициент диффузии атомов при резонансной перезарядке выражается следующей формулой (по Дравину):

$$D_{z-1,1}^{\text{рез. пер.}} = \frac{3\sqrt{2}}{16\pi a_0^2 n_{z,1}} \left(\frac{m_e}{m_z}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi k T_z}{m_z}\right)^{1/2} \left(\frac{k T_z}{e_1^H}\right), \quad (8.15)$$

где  $n_{z,1}$ ,  $m_z$  и  $T_z$  — плотность, масса и температура ионов. Для атомов водорода, гелия и аргона в основном состоянии в оптически тонкой плазме найдены следующие значения средних диффузионных длин (таблица).

Таблица

Средние длины диффузии  $l_D$  (см) при  $n_e = 10^{16} \text{ см}^{-3}$

Газ	Т, К			
	12000	16000	24000	48000
H	7,9	0,19	0,034	—
He	1900	14	9,8	0,078
Ar	4,5	0,092	0,021	—

Из таблицы видно, что при  $n_e = 10^{16} \text{ см}^{-3}$  полное ЛТР с трудом устанавливается во всех газах при температуре ниже 12 000 К, а в гелии — даже при температуре 24 000 К.

Для высоковозбужденных уровней  $\sigma_i > \sigma_1$  и  $l_{D,i} < l_{D,1}$ , следовательно, для них при тех же условиях легче устанавливается ЛТР (частичное).

## § 2. КОРОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАЗМЫ

Если скорость радиационного распада для связанно-связанных и свободно-связанных переходов больше скорости столкно-

вительных процессов (что наблюдается в солнечной короне), имеет место корональное распределение.

В стационарной корональной модели плазмы заселенность возбужденных уровней  $p$  вычисляется из условия

$$S_{1p}n_e n_1 = A_p n_p, \quad (8.16)$$

где  $S_{1p}$  — коэффициент скорости столкновительного возбуждения при температуре  $T_e$  и  $A_p$  — общая вероятность перехода с уровня  $p$ .

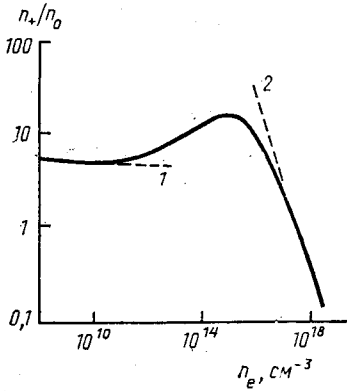


Рис. 51. Степень ионизации в водородной плазме в зависимости от плотности электронов при  $T_e = 16000$  К: 1 — корональное распределение; 2 — ЛТР-распределение

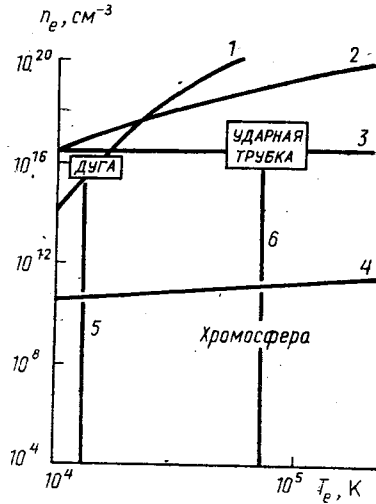


Рис. 52. Области применимости рассматриваемых моделей водородной плазмы:

1 —  $\text{H}:\text{H}^+ = 50:50$ ,  $z=1$ , формула Саха; 2 — граница СИ-модели; 3 — граница ЛТР-модели,  $\text{H}$ ,  $z=1$ ; 4 — граница корональной модели,  $\text{H}$ ,  $z=1$ ,  $p=6$ ; 5 —  $\text{H}:\text{H}^+ = 50:50$ ,  $z=1$ , корональная модель и 6 —  $\text{He}^+:\text{He}^{2+} = 50:50$ ,  $z=2$ , корональная модель

Для ионизации частицы с зарядом  $z-1$  имеет силу соотношение

$$S n_{z-1} = \beta(i) n_z, \quad (8.17)$$

где  $S$  — коэффициент скорости столкновительной ионизации;  $\beta(i)$  — коэффициент скорости радиационной рекомбинации (для перехода  $i \rightarrow i-1$ ).

Корональная модель плазмы ограничена сверху плотностью электронов в соответствии с условием

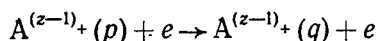
$$n_e \leq 1.5 \cdot 10^{10} (\epsilon_{\text{H}})^{1/2} (kT_e)^4 \text{ см}^{-3}. \quad (8.18)$$

Сопоставление неравенств (8.9) и (8.18) показывает, что минимальная плотность электронов для ЛТР-модели плазмы и максимальная плотность электронов для корональной модели различаются примерно на шесть порядков для водорода и водородоподобных ионов.

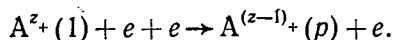
На рис. 51 показаны кривые коронального распределения (1) и ЛТР-распределения (2) для водородоподобной плазмы при  $z=1$  и  $T_e=16000$  К (по Вильсону). Сплошная кривая получена из расчетов Бэйтса и соотр. При плотности электронов менее  $10^{11}$  см<sup>-3</sup> имеет место независимое от плотности электронов корональное распределение. При плотности электронов более  $10^{17}$  см<sup>-3</sup> наблюдается термическое (равновесное) распределение, обратно пропорциональное плотности электронов. Максимум на опытной кривой обусловлен более быстрым ростом скорости ионизации в начальных стадиях при плотности электронов  $10^{11}$  см<sup>-3</sup>  $\leq n_e \leq 10^{17}$  см<sup>-3</sup>.

### § 3. СТОЛКНОВИТЕЛЬНО-ИЗЛУЧАТЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Между ЛТР- и корональной областями (см. рис. 51) ситуация сложна, и надо решать систему дифференциальных уравнений, описывающих все скорости заселения и распада связанных состояний. Для стационарной однородной плазмы большую помощь оказывает столкновительно-излучательная (СИ) модель, впервые предложенная Джioванелли и Д'Анджело, а затем детально исследованная Бэйтсом, Кингстоном и Макуиртером. В этой модели учитываются электронные столкновения, вызывающие переходы между верхними уровнями



и тройную рекомбинацию



При очень высокой плотности электронов СИ-модель переходит в ЛТР-модель плазмы (рис. 52). Из рисунка видно, что в лабораторных низкотемпературных плазмах могут наблюдаться области применимости различных моделей в зависимости от плотности и температуры электронов.

В соответствии с этим при определении электронной температуры из спектральных данных необходимо пользоваться формулами, отражающими истинное состояние (модели) плазмы.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И ПЛОТНОСТИ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ ИЗ СПЕКТРАЛЬНЫХ ДАННЫХ

### ВВЕДЕНИЕ

В каждом случае, прежде чем определять температуру и плотность частиц в низкотемпературной плазме, необходимо детально оценить применимость той или иной модели и уравнений, связывающих определяемые параметры плазмы (температуру, плотность и т. д.) с измеряемыми величинами (интенсивностью линий, полос или континуума, шириной или сдвигом линий и т. п.). При наличии ЛТР в плазме определение параметров плазмы основывается на применимости:

а) больцмановского распределения энергии и частиц по дискретным уровням (интенсивности спектральных линий или полос либо непрерывного излучения при свободно-связанных переходах);

б) максвелловского распределения частиц по скоростям (интенсивность континуума при свободно-свободных переходах или уширение линий благодаря доплеровскому эффекту);

в) уравнения Саха (интенсивность линий ионов разной кратности, штарковское уширение линий, зависящее от плотности заряженных частиц).

### § 1. МЕТОДЫ ДИАГНОСТИКИ ЛТР-ПЛАЗМЫ

Температура оптически тонкой однородной ЛТР-плазмы определяется многими методами.

Наиболее простым в лабораторной практике является метод, основанный на измерении относительных интенсивностей спектральных линий:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1 g_1 \lambda_2 Q_2 n_1}{A_2 g_2 \lambda_1 Q_1 n_2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{kT}\right), \quad (9.1)$$

где  $A_i$  — коэффициент Эйнштейна;  $n_i$  — плотность частиц в основном состоянии;  $Q_i$  — сумма по состояниям.

Для одного и того же атома или иона  $Q_1 = Q_2$  и  $n_1 = n_2$ , так что

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{A_1 g_1 \lambda_2}{A_2 g_2 \lambda_1} \exp\left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{kT}\right), \quad (9.2)$$

откуда

$$\ln \frac{I_i}{A_i g_i \lambda_i} = -\frac{\varepsilon_i}{kT} + \text{const}, \quad (9.2a)$$

т. е. по наклону прямой (рис. 53), характеризующей зависи-

мость левой части уравнения от энергии возбуждения атома (или иона)  $\varepsilon_i$ , можно определить температуру плазмы. Из отношения

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{kT}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \frac{\Delta(I_1/I_2)}{I_1/I_2} \quad (9.3)$$

видно, что точность определения температуры тем выше, чем больше разность энергий верхних уровней двух линий. При измерении отношения интенсивностей линий с точностью в 10% при  $T \sim 20000$  К, например, пара линий He I 4026 Å и 3889 Å показывает неточность в определении температуры в 19%.

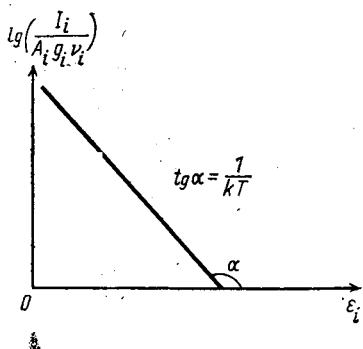


Рис. 53. Определение температуры плазмы по относительным интенсивностям спектральных линий

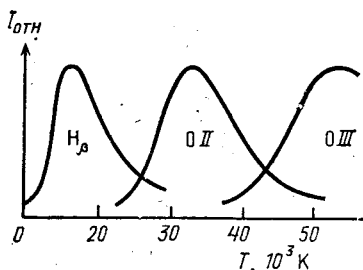


Рис. 54. Зависимость от температуры интенсивностей линий  $H_\beta$  ( $\lambda=4861$  Å), O II ( $\lambda=4561$  Å) и O III ( $\lambda=3447$  Å)

Повышения точности можно достичь, используя уровни, принадлежащие ионам разной кратности одного и того же элемента. Однако в формуле для отношения интенсивностей

$$\frac{I_1}{I_2} = 2 \frac{A_1 g_1 \lambda_2}{A_2 g_2 \lambda_1} \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{1}{n_e} T^{3/2} \times \exp \left[ - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_{\text{ион}} - \Delta\varepsilon_{\text{ион}})}{kT} \right] \quad (9.4)$$

появится дополнительно плотность электронов, которую надо вычислять по уравнению Саха как функцию температуры. Кроме того, необходимо определить снижение энергии ионизации  $\Delta\varepsilon_{\text{ион}}$ , обусловленное взаимодействием атома с окружающими его заряженными частицами плазмы и равное, по Гриму и Эккеру

$$\Delta\varepsilon_{\text{ион}} = z \frac{e_0^2}{8\pi\varepsilon_0 l_D} \quad (3.36a)$$

где  $l_D$  — дебаевский радиус экранирования.



Можно использовать относительные интенсивности линии ионов различных элементов, поскольку для них уравнения Саха связаны одними и теми же значениями  $T$  и  $n_e$ . Отношение  $I_1/I_2$  в этом случае сильно зависит от  $T$ :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{f_1 g_1}{f_2 g_2} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^3 \frac{Q_2^+}{Q_1^+} \frac{n_1}{n_2} \exp\left(\frac{\Delta \epsilon \alpha_1}{kT \alpha_2}\right), \quad (9.5)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — степени ионизации двух элементов;  $f_1$  и  $f_2$  — силы осцилляторов линий;  $\Delta \epsilon = \epsilon_{\text{ион},1} - \epsilon_{\text{ион},2} - (\epsilon_1^* - \epsilon_2^*)$ ;  $\epsilon_{\text{ион},1}$  и  $\epsilon_{\text{ион},2}$  — потенциалы ионизации этих элементов. Можно установить верхнюю и нижнюю границы области температур, для которых применим метод относительных интенсивностей линий. В области высоких температур рассматриваемые отношения начинают слабо зависеть от температуры. Следовательно, для измерения температуры плазмы в конкретных условиях надо выбирать те атомы или ионы, потенциалы возбуждения которых того же порядка, что и электронная температура. При более низких температурах, когда отношение интенсивностей становится очень большим, применение метода невозможно, если интенсивность линии с более короткой длиной волны настолько мала, что ее не удастся зарегистрировать. В качестве максимальной величины отношения интенсивностей принимают значение  $10^3$ . За наибольшее, возможное для измерений, значение температуры принимается такое, при котором наклон логарифма отношения интенсивностей как функции логарифма температуры равен единице.

Фаулером и Милном развит впервые в астрофизике, а затем применен Ларенцом к лабораторной плазме, генерируемой в дугах, так называемый метод «нормальных» температур. Если нанести зависимость интенсивности линии от температуры с плотностью частиц, получаемой при решении уравнения Саха и уравнений электронейтральности и материального баланса, то интенсивность каждой линии (по Лохте-Хольтгревену):

$$\begin{aligned} I &= \int I_\nu d\nu = I \int \epsilon_\nu d\nu = \frac{1}{4\pi} A_{ki} n_k h\nu l = \\ &= \frac{1}{4\pi} A_{ki} \frac{g_k}{Q} n h\nu l e^{-\epsilon_k/kT} \end{aligned} \quad (9.6)$$

будет иметь максимум при определенной температуре  $T_n$ , называемой «нормальной» для линии.

Максимум  $I=f(T)$  не является резким, поэтому точность определения  $T$ , хотя и выше, чем в методе относительных интенсивностей линий, все же недостаточно высока.

Для более точного определения температуры ЛТР-плазмы применяют метод измерения наклона кривых абсолютных интенсивностей в зависимости от температуры (рис. 54):

$$I(p, q) = \frac{1}{4\pi} \int n_p A(p, q) h\nu(p, q) dl, \quad (9.7)$$

где  $n_p = n_0 e^{-\epsilon p/kT}$ . Неопределенность в вычислении температуры в этом случае много меньше, чем неопределенность в измерении интенсивности. Связь между этими ошибками дается формулой

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{h\nu}{kT} \frac{\Delta T}{T}. \quad (9.7a)$$

Обычно  $kT/h\nu < 1$ , и вследствие этого  $\Delta T/T < \Delta I/I$ .

Можно определить температуру плазмы и по непрерывному излучению (континууму), измеряя абсолютную интенсивность такого излучения при различных длинах волн. Наклон  $\ln I_\nu$  от  $\nu$  даст значение  $T$ . Излучение при свободно-связанных переходах всегда примыкает к границам серий и наблюдается в области, близкой к видимой:

$$I_\nu^{fb} = \text{const} \cdot z^2 \frac{n_+ n_e}{T^{1/2}} [1 - e^{-h\nu/kT}], \quad (9.8)$$

где, например, для водорода  $\text{const} = \frac{16\pi e^6}{3c^3 (6\pi m^3 k)^{1/2}}$ .

Свободно-свободные переходы, приводящие к тормозному излучению электронов, описываются следующей формулой:

$$I_\nu^{ff} = \text{const} \cdot z^2 \frac{n_+ n_e}{T^{1/2}} e^{-h\nu/kT}. \quad (9.9)$$

Эти переходы преобладают в микроволновой или инфракрасной области. Метод Грима основан на измерении отношения интенсивностей линий и континуума в области 50—100 Å, в середине которой находится центр линии. При этом необходимо учитывать одновременно свободно-связанные и свободно-свободные переходы:

$$I_\nu = \text{const} \cdot z^2 \frac{n_+ n_e}{T^{1/2}} \left\{ [1 - e^{-h\nu/kT}] \frac{\gamma}{Q_z} \xi(\nu, T) + G e^{-h\nu/kT} \right\}, \quad (9.10)$$

где  $\gamma$  — множитель, учитывающий статистический вес иона;  $\xi(\nu, T)$  — фактор Бибермана, учитывающий скачкообразное изменение  $I_\nu$  от  $\nu$  у границ серий;  $G$  — фактор Гаунта, вносящий квантово-механические поправки в классическое сечение фотоионизации.

Ситон предложил определять электронную температуру по отношению интенсивностей континуума по обе стороны границы серии Бальмера. Метод, примененный впервые Ситоном для оценки электронной температуры в планетарной туманности, использован позднее Шлютером для измерения температуры водородной плазмы в радиочастотном разряде. Метод применим для определения температур ниже  $10^5$  К, когда отношение интенсивностей континуума заметно меняется с изменением температуры (рис. 55). Точность определения температуры ЛТР-плазмы увеличивается на порядок, если в относительно большом интервале изменения температур провести сравнение хода

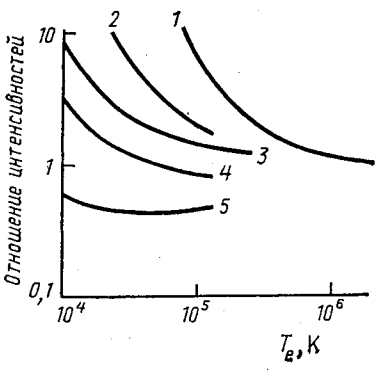


Рис. 55. Зависимость от электронной температуры отношения интенсивностей (выраженных в фотонах) континуума водородной плазмы в выделенных спектральных интервалах:  
 1 —  $\lambda, 900 \text{ \AA}/\lambda, 930 \text{ \AA}$  (лаймановский скачок); 2 —  $H\gamma/\text{континуум}$ ; 3 —  $\lambda, 3500 \text{ \AA}/\lambda, 4500 \text{ \AA}$  (бальмеровский скачок); 4 —  $\lambda, 3500 \text{ \AA}/\lambda, 2500 \text{ \AA}$ ; 5 —  $\lambda, 6000 \text{ \AA}/\lambda, 2500 \text{ \AA}$

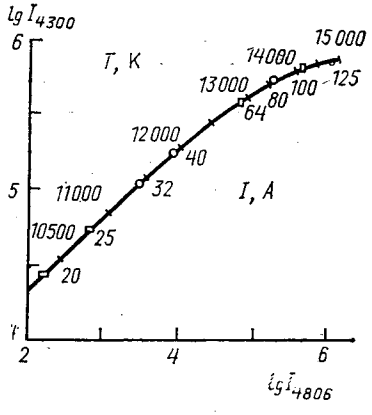


Рис. 56. Сравнение интенсивностей линий AgI ( $\lambda=4300 \text{ \AA}$ ) и AgII ( $\lambda=4806 \text{ \AA}$ ). Измеренные точки относятся к различным токам дуги. Сплошная линия — теоретическая кривая

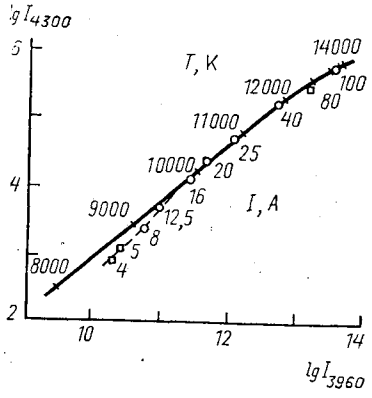


Рис. 57. Сравнение интенсивностей линии AgI ( $\lambda=4300 \text{ \AA}$ ) и континуума при 3960 А. Измеренные точки относятся к различным токам дуги

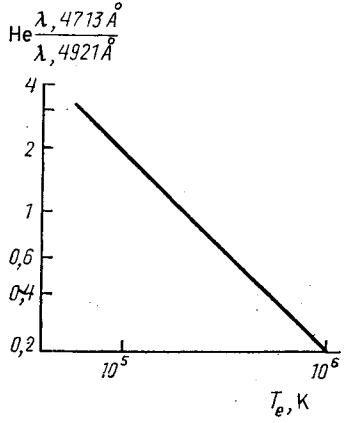


Рис. 58. Зависимость от электронной температуры отношения интенсивностей (выраженных в фотонах) синглетной и триплетной линий гелия

двух интенсивностей, например, одной линии Ag I и одной линии Ag II или одной линии (Ag I или Ag II) и континуума (рис. 56, 57).

Пунктирная линия на рис. 57 (ниже 12А) означает отклонение от ЛТР. Для повышения точности определения температуры плазмы можно использовать сравнение вышеуказанных интенсивностей линии и континуума с интенсивностью излучения черного тела и полушириной одной из линий.

В неоднородной оптически тонкой ЛТР-плазме коэффициент испускания является функцией расстояния от оси плазменного столба, поэтому для определения интегральной интенсивности излучения плазмы делят ее радиус на несколько (10—40) частей и решают на ЭВМ уравнение Абеля

$$I(y) = 2 \int_y^R \frac{\varepsilon(r)r}{\sqrt{r^2 - y^2}} dr, \quad (9.11)$$

где  $y$  — расстояние от оси.

В ЛТР-плазмах, не являющихся оптически тонкими, температуру определяют обычно по обращению спектральной линии. Для этого за плазмой помещают независимый источник света. Интенсивность излучения плазмы определяется по формуле

$$I_{\nu, \text{пл}} = B_{\nu} \{1 - \exp[-\kappa(\nu)l]\}, \quad (9.12)$$

где  $B_{\nu}$  — спектральная яркость излучения (по Планку), или функция Планка;  $\kappa(\nu)$  — коэффициент поглощения, равный

$$\kappa(\nu) = \frac{n_e n_{z-1}(p)}{4\pi\rho} \frac{2^6 \pi^3}{(6\pi)^{3/2}} \left(\frac{m}{kT_e}\right)^{1/2} \frac{e^6}{hcm^2} \frac{1}{\nu^3} (1 - e^{-h\nu/kT_e}). \quad (9.13)$$

Полная интенсивность излучения вместе с излучением независимого источника  $s$  дается выражением

$$I_{\nu, \text{полн}} = I_{\nu, \text{пл}} + I_{\nu, s} \exp[-\kappa(\nu)l], \quad (9.14)$$

в котором учитывается поглощение в плазме толщиной  $l$  некоторой доли излучения источника. Определив  $B_{\nu}$ , находят значение  $T$ .

Температуру тяжелых частиц в таких плазмах (если это понятие существует) можно определить по скорости звука:

$$v^2 = \gamma RT/M, \quad (9.15)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты.

В нестационарных ЛТР-плазмах (пинчи, СВЧ, импульсные разряды и ударные волны) установление ЛТР следует проверять в каждом случае отдельно, поскольку процессы релаксации могут задерживать наступление ожидаемого равновесия.

Так, термализация электронов (установление Максвелловского распределения по скоростям) при  $n_e = 10^{17} \text{ см}^{-3}$  и  $kT = 1 \text{ эВ}$

имеет  $\tau_{eq} \sim 10^{-7}$  с. Поэтому для процессов, происходящих за времена, меньшие, чем  $10^{-7}$  с (СВЧ — разряды с частотой выше 10 Мгц), может наступить заметное отклонение от максвелловского распределения, т. е. может отсутствовать важный для процесса ионизации энергетический «хвост» распределения. Если неизвестно действительное распределение электронов по скоростям, надо ясно представлять, что спектроскопическое измерение может привести к значениям температур, которые отличаются от действительной эффективной температуры в 2—3 раза. Под эффективной температурой здесь всегда понимается средняя кинетическая энергия электронов, т. е.  $3/2 kT_e$ .

Время установления кинетического равновесия между электронами и тяжелыми частицами (атомами или ионами), как и время установления болцмановского распределения энергии по возбужденным состояниям при  $n_e = 10^{17}$  см<sup>-3</sup> и  $kT \sim 1$  эВ, того же порядка ( $10^{-7}$  с), что и время установления максвелловского распределения по скоростям. Время, необходимое для установления ЛТР, зависит от числа и вида столкновений (упругие или неупругие). При высоких плотностях частиц и низких напряжениях поля относительная разность  $(T_e - T_g)/T_e$  оказывается небольшой. Так, при 8000 К и  $E \sim 20$  В/см в воздухе  $\Delta T = 4$  К.

## § 2. ДИАГНОСТИКА ПЛАЗМЫ, НЕ НАХОДЯЩЕЙСЯ В СОСТОЯНИИ ЛТР

Оптически тонкую плазму, не находящуюся в состоянии ЛТР, исследуют с помощью методов, не зависящих от болцмановского или максвелловского распределения или от уравнения Саха.

В плазме, описываемой корональной моделью (при низкой плотности электронов), можно по зависимости функции (или сечения) возбуждения  $\varphi_{1k}$  уровня  $k$  из основного состояния от  $T_e$  определить значение электронной температуры. При определении  $T_e$  из интенсивности одной линии:

$$I_{ki} = \frac{h\nu}{4\pi} \int n_{z-1} n_e \varphi_{1k} \frac{A_{ki}}{\sum_{m < k} A_{km}} dl \quad (9.16)$$

необходимо знание  $n_e$  и  $n_{z-1}$ . При определении  $T_e$  из отношения интенсивностей линий этого не требуется. Для повышения точности метода выбирают линии одного и того же элемента, функции (или сечения) возбуждения которых сильно различаются. Каннингхем, например, предложил использовать комбинацию из синглетной и триплетной линий гелия. На рис. 58 изображено такое отношение интенсивностей.

Нормальная температура  $T_e(0)$  может быть определена по формуле ионизационного равновесия для дуговых линий:

$$T_e(0) = \frac{8,26 \cdot 10^2 \epsilon_{\text{ион}}}{1 - 0,162\alpha - 0,134 \lg [rz_n(1+r)] - 0,2 \lg \epsilon_{\text{ион}}} K, \quad (9.17)$$

где  $\epsilon_{\text{ион}}$  — энергия ионизации атома (эВ);  $\alpha = \epsilon_{\text{возб}}/\epsilon_{\text{ион}}$ ;  $r = T_g/T_e$ ;  $z_n$  — число эквивалентных электронов во внешней оболочке атома. Температуру электронов можно оценить по излучению плазмы в микроволновой области спектра. Мощность излучения равна

$$P(\nu) = \kappa(\nu) T_r \Delta f, \quad (9.18)$$

где  $\kappa(\nu)$  — коэффициент поглощения плазмы;  $T_r$  — эффективная радиационная температура, равная  $T_e$  при максвелловском распределении электронов по скоростям;  $\Delta f$  — полоса пропускания волноводного приемника.

Для неводородной плазмы температуру электронов можно определить из квадратичного эффекта Штарка. В этом случае ширина и сдвиг линий пропорциональны плотности электронов, а их отношение по неадиабатической теории не зависит от  $n_e$ , но зависит от электронной температуры. Метод пригоден для плазм при  $T_e \leq 10^5$  К.

Температура электронов может быть определена из полуширины линии рассеяния лазерного излучения в плазме в пределе томсоновского рассеяния излучения на свободных электронах:

$$\Delta\lambda = 4 \sqrt{2 \ln 2} \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{kT_e}{m}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (9.19)$$

где  $\lambda$  — длина волны зондирующего излучения;  $\theta$  — угол рассеяния.

### § 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ И ВРАЩАТЕЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУР МОЛЕКУЛ

Колебательная температура молекул определяется по относительным интенсивностям отдельных полос двухатомных молекул, принадлежащих одной и той же системе полос. Известно, что сумма сил всех полос с одним и тем же верхним или нижним состоянием пропорциональна числу молекул в этом состоянии, т. е.

$$\ln \sum_{\nu''} \frac{I_{\text{исп}}}{\nu^4} = C_1 - \frac{g'(\nu')}{kT} hc, \quad (9.20)$$

или

$$\ln \sum_{\nu'} \frac{I_{\text{погл}}}{\nu^4} = C_2 - \frac{g''(\nu'')}{kT} hc.$$

Вращательная температура молекул определяется путем измерения интенсивностей вращательных линий в молекулярной полосе двухатомной молекулы. Число молекул на вращательном уровне основного колебательного состояния равно

$$N_j = N \frac{hcB}{kT} (2j + 1) \exp \left[ -Bj(j + 1) \frac{hc}{kT} \right], \quad (9.21)$$

где  $j$  — вращательное квантовое число;  $B$  — вращательная постоянная молекулы ( $\text{см}^{-1}$ ):

$$B = \frac{h}{8\pi^2 c I}, \quad (9.21a)$$

$I$  — момент инерции молекулы. Интенсивность вращательных линий определяется силой линии  $s$ , умноженной на число молекул на начальном уровне  $N_j$ :

$$I = N_j s.$$

Можно показать, что

$$\frac{\ln I_{j'j''}}{S_{j'j''}} = - \frac{\epsilon_{\text{вр}}}{kT}, \quad (9.22)$$

где  $S_{j'j''}$  — фактор Хэнля—Лондона, определяющий относительные интенсивности ветвей внутри полосы;  $\epsilon_{\text{вр}} = B \frac{hc}{k} j'(j' + 1)$  — энергия верхнего вращательного уровня.

Если рассматривать  $R$  и  $P$  — ветви полосы, то на кривой зависимости интенсивности от длины волны будет существовать одна точка, где обе ветви имеют одинаковые интенсивности. Эта точка определяет температуру даже в том случае, когда некоторые линии, образующие ветви, полностью не разрешены.

#### § 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ АТОМОВ (ИЛИ МОЛЕКУЛ)

Поступательная температура атомов (или молекул) определяется при измерении полуширины  $\Delta\lambda$  излучаемой линии, уширенной вследствие эффекта Доплера

$$\Delta\lambda = 7,16 \cdot 10^{-7} \lambda \sqrt{T/M}, \quad (9.23)$$

если профиль интенсивности — гауссовский. Определению температуры по доплеровским профилям линии мешают турбулентность и резонансное уширение линий, которые все же можно отделить при измерениях. График зависимости интенсивности от  $\Delta\lambda$  показывает, какой эффект уширения линий доминирует.

## § 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОНОВ

Плотность электронов  $n_e$  при наличии ЛТР в плазме определяется из ширины линии при линейном и квадратичном штарк-эффектах. Профили водородных линий с линейными штарк-эффектом (особенно профиль  $H_\beta$ -линии) позволяют легко определить  $n_e$ :

$$\Delta\lambda = \pi^2 C_2^2 \frac{\lambda_0^2}{c} n_e \frac{1}{v}, \quad (9.24)$$

где  $\Delta\lambda$  — полуширина линии  $H_\beta$ .

Чаще для этой цели используется зависимость  $\lg \Delta\lambda$  от  $\lg n_e$  (рис. 59), поскольку температура мало влияет на полуширину линии.

Для неводородной плазмы  $n_e$  определяется из уширения или сдвига линий вследствие квадратичного эффекта Штарка

$$\Delta\lambda = 1,82 \cdot C_4^{2/3} \frac{\lambda_0}{c} n_e v^{1/3}. \quad (9.25)$$

Совпадение опытных значений  $n_e$  с вычисленными составляет 25—30%. Можно определить  $n_e$  и из измеренных ширин ионных линий, хотя точность недостаточно высока — до 50%.

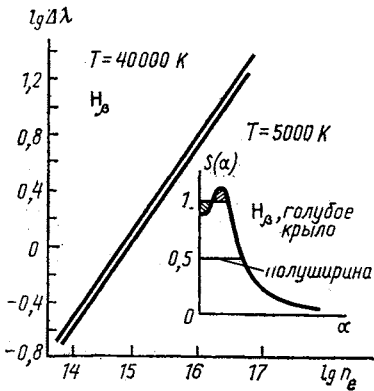


Рис. 59. Зависимость логарифма полуширины линии  $H_\beta$  от логарифма относительной плотности электронов:  $S_\alpha$  — функция, описывающая профиль линии

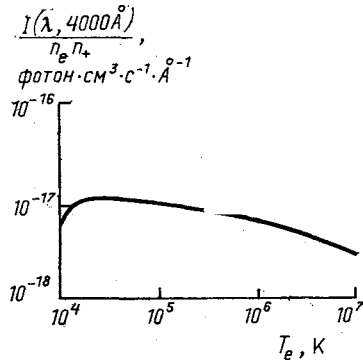


Рис. 60. Зависимость от температуры спектральной плотности континуума водородной плазмы (на длине волны 4000 Å)

Более простым является определение  $n_e$  из сдвига границы серии. Согласно формуле Инглиса и Теллера для водорода можно записать

$$\ln n_e = 23,26 - 7,5 \cdot \lg n_{\text{макс}}, \quad (9.26)$$



где  $n_{\text{макс}}$  — главное квантовое число последней бальмеровской линии, которая может наблюдаться в спектре отдельно. При низких  $T_e$  следует учитывать влияние атомов и вместо  $n_e$  в уравнении (9.26) надо подставить  $(n_e + n_+)$ .

Плотность электронов в некоторых случаях находится по относительной интенсивности линий, принадлежащих атомам различных кратностей ионизации (ур. 9.4) или из абсолютных интенсивностей линии либо непрерывного излучения (ур. 9.7—9.9) (рис. 60).

Для ЛТР-плазм, не являющихся оптически тонкими (при  $p \ll 5$  атм),  $n_e$  определяют по изменению показателя преломления  $n_{\text{эл}}$ :

$$n_{\text{эл}} - 1 = -\frac{r_0 n_e}{2\pi} \lambda^2, \quad (9.27)$$

где  $r_0 = e^2/m_e c^2 = 2,81 \cdot 10^{-13}$  см — «классический радиус» электрона. Для исследования плазмы применяют лазерный или градиентный интерферометр.

В плазмах, не находящихся в состоянии ЛТР и не являющихся оптически тонкими, плотность электронов вычисляют по абсолютной интенсивности зондирующего лазерного излучения, рассеиваемого свободными электронами:

$$I_e/I_m = n_e \sigma_T / n_m \sigma_R, \quad (9.28)$$

где  $\sigma_T$  и  $\sigma_R$  — сечения томсоновского (на электронах) и рэлевского (на молекулах) рассеяния, отношение которых не зависит от плотности рассеивающих частиц. Плотность плазмы можно определить также по поглощению  $\gamma$ -лучей или пучков быстрых электронов или по поглощению излучения в крыльях линий.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная литература

- Вайнштейн Л. А., Собельман И. И., Юков Е. А. Сечения возбуждения атомов и ионов электронами. М., 1973. 144 с.
- Грим Г. Спектроскопия плазмы. М., 1969. 452 с.
- Диагностика плазмы/Под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда. М., 1967. 516 с.
- Кинетические процессы в газах и плазме/Под ред. А. Хохштива. М., 1972. 368 с.
- Кондратьев В. Н., Никитин Е. Е., Резников А. И., Уманский С. Я. Термические бимолекулярные реакции в газах. М., 1976. 192 с.
- Мессі Г., Бархон Е. Электронные и ионные столкновения. М., 1958. 604 с.
- Методы исследования плазмы/Под ред. В. Лохте-Хольтгревена. М., 1971. 552 с.
- Семиохин И. А., Страхов Б. В., Осипов А. И. Кинетика гомогенных химических реакций. М., 1986. 232 с.
- Смирнов Б. М. Физика слабоионизованного газа. М., 1978. 416 с.
- Теоретическая и прикладная плазмохимия/Под ред. Л. С. Полака. М., 1975. 304 с.
- Хастед Дж. Физика атомных столкновений. М., 1965. 710 с.
- Шкаровский И., Джонстон Т., Бачинский М. Кинетика частиц плазмы. М., 1969. 396 с.

### Дополнительная литература

#### К главе 2

- Гиршфельдер Дж., Кертис Ч., Бёрд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., 1961. 929 с.
- Глесстон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей реакций. М., 1948. 584 с.
- Леонас В. Б., Самуйлов Е. А.//ТВТ. 1966. Т. 4. С. 710—724.
- Фирсов О. Б.//ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 696—699.
- Dalgarno A., Kingston A. E.//Proc. Phys. Soc. 1959. Vol. 73. P. 455—464.
- Dirac P. A. M.//Proc. Roy. Soc. 1929. Vol. A123. P. 714—733.
- Linnett J. W.//Trans. Farad. Soc. 1940. Vol. 36. P. 1123—1134.
- Morse Ph. M.//Phys. Rev. 1929. Vol. 34. P. 57—64.
- Vanderslice J. T., Mason E. A., Lippincott E. R.//J. Chem. Phys. 1959. Vol. 30. P. 129—136.
- Vanderslice J. T., Mason E. A., Maish W. G.//Ibid. 1959. Vol. 31. P. 738—746, 1960. Vol. 32. P. 515—524.

#### К главе 3

- Исихара А. Статистическая физика. М., 1973. 472 с.
- Чандрасекар С. Принципы звездной динамики. М., 1948. 263 с.
- Druyvesteyn M. J., Penning F. M.//Rev. Mod. Phys. 1940. Vol. 12. P. 87—174.
- Ecker G., Kröll W.//Phys. Fluids. 1963. Vol. 6. P. 62—69.
- Focke A. D.//Ann. der Phys. 1914. Bd 43. S. 810—820.
- Moore Ch. E.//Atomic Energy Levels, Circular of the National Bureau of Standards, 467, Washington, 1949. Vol. I, II.
- Planck M.//Sitzber., der Preuss. Akad. 1917. S. 324; по кн. И. Шкаровского и др. С. 192.

К главе 4

- Матвеев А. Н. Молекулярная физика. М., 1981. 400 с.  
 Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И. Релаксационные процессы в ударных волнах. М., 1965. 484 с.

К главе 5

- Кондратьев В. Н., Никитин Е. Е. Химические процессы в газах. М., 1981. 262 с.  
 Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. М., 1969. 756 с.  
 Ситон М. // Атомные и молекулярные столкновения / Под ред. Д. Бэйтса. М., 1964. 361 с.  
 Смирнов Б. М. // ВТФ. 1966. Т. 4. С. 429—449.  
 Смирнов Б. М. Атомные столкновения и элементарные процессы в плазме. М., 1968. 364 с.  
 Тамм И. Е. // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 337—345; Т. 19. С. 74—77.  
 Фирсов О. Б. // Ibid. 1951. Т. 21. С. 1001—1008.  
 Шифф Л. И. Квантовая механика. М., 1959. 474 с.  
 Bates D. R. // Proc. Roy. Soc. 1957. Vol. A243. P. 15—23.  
 Born M. // Zs. Phys. 1926. Bd 37. S. 863—867; Bd 38. S. 803—827.  
 Born M., Oppenheimer J. B. // Ann. Phys. 1927. Bd 84. S. 457—484.  
 Cario E., Frank J. // Zs. Phys. 1922. Bd 11. S. 161—166.  
 Faxen H., Holtsmark J. Ibid. 1927. Bd 45. S. 307—324.  
 Fisk J. B. // Phys. Rev. 1936. Vol. 49. P. 167—173.  
 Fite W. L., Stebbings R. F., Hummer D. G., Brackmann R. T. // Ibid. 1960. Vol. 119. P. 663—668.  
 Frank J. // Zs. Phys. 1922. Bd 9. S. 259—268.  
 Gryzinski M. // Phys. Rev. 1959. Vol. 115. P. 374—383.  
 Hulthen L. // K. Fysiogr. Sällsk. Lund. Forhandl. 1944. Bd 14. S. 2—5.  
 Jeffreys H. // Proc. Lond. Math. Soc. 1923. Vol. 23. P. 428.  
 Kramers H. A., Ter Haar D. // Bull. Astronom. Inst. Netherlands. 1946. Vol. 10. P. 137; цит. по кн. Дж. Хастеда. С. 623.  
 Kruithof A. A., Penning F. M. // Physica. 1937. Vol. 4. P. 430—435.  
 Landau L. D. // Phys. Zs. Sowjetunion. 1932. Bd 1. S. 88—98; Bd 2. S. 46—51.  
 Langevin P. // Ann. Chem. (Phys.). 1905. Vol. 5. P. 245.  
 Massey H. S. W. // Rep. Progr. Phys. 1949. Vol. 12. P. 248—269.  
 Massey H. S. W., Smith R. A. // Proc. Roy. Soc. 1933. Vol. A142. P. 142—172.  
 Moiseiwitsch B. L. // J. Atm. Terr. Phys. 1955. Vol. 7. Spec. Supp. N 2. P. 23; цит. по кн. Дж. Хастеда. С. 591.  
 Oppenheimer J. B. // Phys. Rev. 1928. Vol. 32. P. 361—376.  
 Rapp D., Francis W. E. // J. Chem. Phys. 1962. Vol. 37. P. 2631—2645.  
 Rosen N., Zener C. // Phys. Rev. 1932. Vol. 40. P. 502—507.  
 Thomson J. J. // Phil. Mag. 1912. Vol. 23. P. 449—457.  
 Wigner E. // Zs. Phys. 1927. Bd 40. S. 883—892.  
 Zener C. // Proc. Roy. Soc. 1932. Vol. A137. P. 696—702.

К главе 6

- Гейдон А. Энергии диссоциации и спектры двухатомных молекул. М. 1949. 303 с.  
 Фриш С. Е. Оптические спектры атомов. М.; Л., 1963. 640 с.  
 Bates D. R. // Mon. Not. Roy. Astronom. Soc. 1946. Vol. 106. P. 432—445.  
 Bates D. R., Seaton M. J. // Ibid. 1948. Vol. 109. P. 698—704.  
 Burgess A., Seaton M. J. // Ibid. 1960. Vol. 120. P. 121—151.  
 Gaunt J. A. // Proc. Roy. Soc. 1930. Vol. A126. P. 654—660.  
 Goepfert-Mayer M. // Ann. Phys. 1931. Bd 9. S. 273—294.

- Karzas W. J., Latter R.//Astrophys. Journ. 1961. Vol. 6. Suppl. N 55. P. 167—212.  
 Kramers H. A.//Phil. Mag. 1923. Vol. 46. P. 836—871.  
 Litvak M., Edwards D. F.//J. Appl. Phys. 1966. Vol. 37. P. 4462—4474.  
 Seaton M. J.//Revs. Mod. Phys. 1958. Vol. 30. P. 979—1008.  
 Unsöld A.//Ann. Phys. Lpz. 1938. Bd 33. S. 607—616.

#### К главе 7

- Аллен К. У. Астрофизические величины. М., 1977. 446 с.  
 Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высоко-температурных гидродинамических явлений. М., 1966. 688 с.  
 Парбузина Л. Р., Семнохин И. А.//Ж. физ. химии. 1985. Т. 59. С. 1769—1773.  
 Парбузина Л. Р., Семнохин И. А.//Там же. С. 1774—1778.  
 Рихтер Ю.//Методы исследования плазмы/Под ред. В. Лохте-Хольтгревена. М., 1971. Гл. 1.  
 D'Angelo N.//Phys. Rev. 1961. Vol. 121. P. 505—507.  
 Bates D. R., Kingston A. E., McWhirter R. W. P.//Proc. Roy. Soc. 1962. Vol. A267. P. 297—312.  
 Bates D. R., Kingston A. E., McWhirter R. W. P.//Ibid. 1963. Vol. A270. P. 155—167.  
 Biondi M.//Phys. Rev. 1963. Vol. 129. P. 1181—1188.  
 Byron S., Stabler R. C., Borts P. J.//Phys. Rev. Lett. 1962. Vol. 8. P. 376—379.  
 Cacciatore M., Capitelli M., Drawin H. C.//Physica. 1976. Vol. 84C. P. 267—274.  
 Cacciatore M., Capitelli M., Gorse E.//J. Phys. (D). 1980. Vol. 13. P. 575—582.  
 Capitelli M., Delonardo M., Molinary E.//Chem. Phys. 1977. Vol. 20. P. 417—429.  
 Cooper W. S., Kunkel W. B.//Phys. Rev. 1965. Vol. 138a. P. 1022—1027.  
 Drawin H. W.//Ann. Phys., Lpz. 1964. Bd 1. 14. S. 262; Z. Naturforschg. 1964. Bd 19a. S. 1451—1460.  
 Drawin H. W.//Z. Phys. 1965. Bd 186. S. 99—107.  
 Drawin H. W.//Collision and Transport Sections, Report EUR—CEA—FC—383, March 1966, revised 1967; Atompraxis. 1967. Vol. 13. P. 390—392, 413—418.  
 Drawin H. W.//Zs. Phys. 1969. Bd 225. S. 470—482.  
 Drawin H. W.//Ibid. S. 483—493.  
 Drawin H. W.//J. Phys. 1979. Vol. 40. C7, Pt. 2. P. 149—170.  
 Drawin H. W., Eward F.//Physica. 1976. Vol. 85C. P. 333—353.  
 Drawin H. W., Fumelli M., Weste G.//Z. Naturforschg. 1965. Bd 20a. S. 184—192.  
 Elwert G.//Ibid. 1952. Bd 7a. S. 432—439.  
 Finkelburg W., Maecker H.//Handbuch der Physik//Red. S. Flugge. Berlin. 1956. Bd 2. 520 S.  
 Fite W. L., Smith A. C. H., Stebbings R. F.//Proc. Roy. Soc. 1962. Vol. A 268. P. 527—536.  
 Gear C. W.//Com. ACM. 1971. Vol. 14. P. 176—179.  
 Giovanelli R. G.//Austral. J. Sci. Research. 1948. Vol. A1. P. 275—304.  
 Glennon B. M., Wiese W. L.//Bibliography on Atomic Transition Probabilities. Washington, 1966. 92 p.  
 Gusinow M. A., Gerardo J. B., Verdeyen J. T.//Phys. Rev. 1966. Vol. 149. P. 91—96.  
 Hinnov E., Hirshberg J. G.//Ibid. 1962. Vol. 125. P. 795—801.  
 Hirshberg J. G., Hinnov E., Hoffmann F. W.//Proc. 6-th Int. Conf. on Ionis. Phenom. in Gases. Paris. 1964. Vol. 3. P. 359—362.

- Ingraham J. C., Brown S. C.//Phys. Rev. 1965. Vol. 138. P. 1015—1022.
- Kuckes A. F., Motley R. W., Hinnov E., Hirshberg J. G.//Phys. Rev., Lett. 1961. Vol. 6. P. 337—339.
- Mason E. A., Saxena S. C.//Phys. Fluids. 1958. Vol. 1. P. 361—369.
- McWhirter R. W. P., Hearn A. G.//Proc. Phys. Soc. London, 1963. Vol. 82. P. 641—654.
- Meyerand R. G., Jr. et al.//Proc. 5-th Int. Conf. on Ionis. Phenom. in Gases. Amsterdam, 1962. Vol. 1. P. 333—342.
- Petshek H., Byron S.//Ann. Phys., New York. 1957. Vol. 1. P. 270—315.
- Schlüter H.//Z. Naturforschg. 1961. Bd 16a. S. 972—974.
- Shkarofsky I. P.//Can. J. Phys. 1961. Vol. 39. P. 1619—1703.
- Swift J. D.//Proc. 5-th Int. Conf. on Ionis. Phenom. in Gases. Amsterdam, 1962. Vol. 1. P. 343—351.
- Thomson J. J.//Phil. Mag. 1924. Vol. 47. P. 337—378.
- Twiddy N. D.//Proc. Roy. Soc. 1963. Vol. A 275. P. 388—396.
- Wiese W. L., Smith M. W., Glennon B. M.//Hydrogen through Neon. Atomic Transition Probabilities. Washington, 1966. Vol. 1. 153 p.
- Wilhelm H. E.//J. Chem. Phys. 1967. Vol. 47. P. 4356—4365.

#### К главе 8

- Колесников В. Н.//Труды ФИАН СССР/ Под ред. Д. В. Скобельщина. М., 1964. Т. 30. С. 66—157.
- Лохте-Хольтгрёвен В.//Методы исследования плазмы/Под ред. В. Лохте-Хольтгрёвена. М., 1971. Гл. 3.
- Макуиртер Р.//Диагностика плазмы/Под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда. М., 1967. Гл. 5.
- Рихтер Ю.//Методы исследования плазмы/Под ред. В. Лохте-Хольтгрёвена. М., 1971. Гл. 1.
- D'Angelo N.//Phys. Rev. 1961. Vol. 121. P. 505—507.
- Bates D. R., Kingston A. E., McWhirter R. W. P.//Proc. Roy. Soc. 1962. Vol. A267. P. 297—312.
- Bates D. R., Kingston A. E., McWhirter R. W. P.//Ibid. 1963. Vol. A270. P. 155—167.
- Berg H. F.//Zs. Phys. 1967. Bd 207. S. 404—410.
- Biermann L.//Naturwiss. 1947. Bd 34. S. 87—88.
- Drawin H. C.//Zs. Phys. 1969. Bd 228. S. 99—119.
- Giovanelli R. G.//Austral. J. Sci. Research. 1948. Vol. A1. P. 275—304.
- Griem H. P.//Phys. Rev. 1963. Vol. 131. P. 1170—1176.
- McWhirter R. W. P.//Nature, London. 1960. Vol. 190. P. 902—903.
- McWhirter R. W. P., Hearn A. G.//Proc. Phys. Soc. London. 1963. Vol. 82. P. 641—654.
- Miyamoto S.//Publ. Astronom. Soc. Japan. 1950. Vol. 2. P. 23—31.
- Thomson J. J.//Phil. Mag. 1912. Vol. 23. P. 449—457.
- Wilson R.//J. Quant. Spectr. Rad. Transfer. 1962. Vol. 2. P. 477—490.
- Woolley R. v. d., Allen C. W.//Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 1948. Vol. 108. P. 292—305.

#### К главе 9

- Визе В.//Диагностика плазмы/Под ред. Р. Хаддлстоуна и С. Леонарда. М., 1967. Гл. 6.
- Лохте-Хольтгрёвен В.//Методы исследования плазмы/Под ред. В. Лохте-Хольтгрёвена. М., 1971. Гл. 3.
- Теоретическая и прикладная плазмохимия/Под ред. Л. С. Полака. М., 1975. 304 с.
- Унзольд А. Физика звездных атмосфер. М., 1949. 630 с.
- Chuang H.//Appl. Optics. 1965. Vol. 4. P. 1589—1592.

- Ecker G., Kröll W.//Phys. Fluids. 1963. Vol. 6. P. 62—69.  
Griem H. P.//Phys. Rev. 1963. Vol. 131. P. 1170—1176.  
Inglis D. R., Teller E.//Astrophys. J. 1940. Vol. 90. P. 439; цит. по  
кн. В. Лохте-Хольтгревена. С. 131.  
Lorenz R. W.//Z. Phys. 1951. Bd 129. S. 327—342.  
Richter J.//Z. Astrophys. 1965. Bd 61. S. 57—66.

# УКАЗАТЕЛЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Буква алфави- *та	Условное обозначение	Стра- ница	
<b>A, a</b>	$A$ — амплитуда колебаний	5	
	$a_0$ — боровский радиус	9	
	$a$ — диаметр	14	
	$a_{эф}$ — ускорение	18	
	$A^{(z-1)+}(p)$ — частица с зарядом $(z-1)_+$ на уровне « $p$ »	66	
	$A^{z+(1)}$ — ион с зарядом $z_+$ в основном состоянии	67	
	$A(p, j)$ — вероятность спонтанного девозбуждения	70	
	$a_{i,0}$ — амплитуда рассеяния	90	
	<b>B, b</b>	$b$ — прицельное расстояние (параметр)	26
		$b_c$ — критическое значение прицельного параметра	58
$B(j, p)$ — коэффициент Эйнштейна для поглощения		71	
$B^{(z-1)+}(1)$ — тяжелая частица в основном состоянии		71	
$B_e$ и $B_i$ — подвижности электронов и ионов		90	
$B_v$ — спектральная яркость излучения		124	
$B$ — вращательная постоянная		127	
<b>C, c</b>	$C_0$ — интеграл столкновений	17	
	$c_{pi}n(i)$ и $c'_{pi}n(i)n(1)$ — скорости столкновительно-излучательных ионизации и возбуждения	77	
	$c_{ij}$ — коэффициент скорости ударного возбуждения	106	
		106	
<b>D, d</b>	$d$ — среднее расстояние между частицами	5	
	$D$ — энергия диссоциации	11	
	$D_{a_1}$ и $D_{a_2}$ — коэффициенты амбиполярной диффузии частиц 1 и 2	59	
	$\langle d_+ \rangle$ — среднее расстояние между ионами	75	
	$d$ — геометрическая толщина плазмы	88	
	$D_e$ и $D_i$ — диффузности электронов и ионов	89	
	$D_{z-1,1}^{рез. пер.}$ — коэффициент диффузии атомов при резонансной перезарядке	116	
		116	
	<b>E, e</b>	$E$ — электростатическое поле (напряженность поля)	5
		$E_F$ — энергия Ферми	7
$E_v$ — колебательная энергия		11	
$E_a$ — энергия свободных атомов		12	
$E_{эф}$ — эффективное электрическое поле		18	
$E_0$ — равновесное значение энергии		25	
$-E_i(-x)$ — интегральная показательная функция		67	
		67	
<b>F, f</b>	$f_{0,n}$ — сила осциллятора для перехода $0 \rightarrow n$	10	
	$f$ — функция распределения	13	
	$F$ — сила	37	
	$f_p$ и $f_q$ — радиальные волновые функции	63	
	$F$ — интенсивность падающего светового потока	65	
	$\Delta F$ — элемент поверхности	95	
	$\Delta f$ — полоса пропускания волноводного приемника	126	
		126	
<b>G, g</b>	$g_i$ — статистический вес	20	
	$G(v)$ — фактор Гаунта	45	
	$g(U_{pq})$ — поправочный множитель для атомов и ионов	69	

<i>H, h</i>	$\hbar = h/2\pi$ , где $h$ — постоянная Планка	7
	$H$ — гамильтониан, функция Гамильтона	17
	$h$ — ускорение	20
	$h_1$ — множитель, учитывающий ионизацию возбужденных уровней	68
<i>I, i</i>	$\mathcal{I}_{ij}$ — обменный интеграл	12
	$\mathcal{J}$ — якобиан	14
	$I_e$ — электронный ток	45
	$\mathcal{J}(\eta)$ — интеграл Моисейвича	54
	$I_\nu, I_i$ — интенсивность спектральной линии	119
	$I_\nu^{j\nu}$ и $I_\nu^{jt}$ — интенсивности излучения при свободно-связанных и свободно-свободных переходах	122
	$\mathcal{J}(y)$ — интеграл Абеля	124
	$I$ — момент инерции	127
$I_{j,j''}$ — интенсивность вращательной линии	127	
<i>J, j</i>	$J_i$ — квантовое число полного углового момента	21
	$j$ — столкновительно-излучательный предел	112
	$j$ — вращательное квантовое число	127
<i>K, k</i>	$k$ — единичный вектор	15
	$k_T$ — множитель Таунсенда	19
	$k$ — волновой вектор, равный $mv/\hbar$	22
	$k_{дис}$ — коэффициент скорости диссоциации	28
	$k_{ион}$ — коэффициент скорости ионизации	29
	$k_\sigma(T)$ — статистическая константа скорости	58
	$k_{12}$ — коэффициент скорости взаимного превращения ионов	60
	$K^{(e)}(p, c)$ — коэффициент скорости ионизации частиц при столкновении с электронами	66
	$K$ — коэффициент скорости любого элементарного процесса	66
	$K^{(e)}(c, p)$ — коэффициент скорости тройной электронной рекомбинации	67
	$K^{(e)}(p, q)$ — коэффициент скорости электронного возбуждения частиц	69
	$K^{(e)}(p, j)$ — коэффициент скорости электронного девозбуждения частиц	70
	$K^{(a)}(p, c)$ — коэффициент скорости ионизации частиц тяжелыми частицами	72
	$K^{(a)}(c, p)$ — коэффициент скорости рекомбинации ионов тяжелыми частицами	72
	$K^{(a)}(p, q)$ — коэффициент скорости возбуждения частиц тяжелыми частицами	73
	$K^{(a)}(p, j)$ — коэффициент скорости девозбуждения частиц тяжелыми частицами	74
	$K_{ij}$ и $K_{ji}$ — коэффициенты скорости заселения и распада $j$ -го уровня	93
$K(r, t)$ — локальный коэффициент теплопроводности	101	
$k$ — коэффициент температуропроводности	103	
$K_i(T_e)$ — константа равновесия	107	
<i>L, l</i>	$L_D$ — дебаевская длина (радиус экранирования)	4
	$l_c$ — средняя длина свободного пробега	14
	$L^3$ — нормировочный объем	22
	$l$ — момент электрона	46
	$l_D$ — характеристическая (средняя) длина диффузии	89
	$L$ — длина ионизационных колонн	91
<i>M, m</i>	$l_T$ — характеристическая длина теплопроводности	102
	$m$ — магнитный момент	106
	$m_A$ и $m_B$ — массы молекул А и В	25



$M$	— масса иона	26
$m_a$	— масса ударяющей частицы типа $B^{(z-1)+}$ (1)	72
$N, n$	$n_D$ — число частиц в объеме дебаевской сферы	5
	$n$ — возбужденное состояние атома	9
	$n_j$ — плотность рассеивателей сорта «j»	17
	$n_i$ — плотность атомов на уровне $i$	20
	$n_z$ (1) — плотность ионов в основном состоянии	22
	$n_A$ — плотность молекул А	25
	$n_m$ — плотность метастабильных атомов	99
	$n_{эл}$ — показатель преломления	129
$P, p$	$P$ — вероятность процесса	16
	$p$ — обобщенный импульс	17
	$P$ — стерический множитель	28
	$P_i^m(\cos \theta)$ — полином Лежандра	33
	$P_{pq}$ — вероятность перехода $p \rightarrow q$	48
	$P_R(b, E)$ — вероятность реакции	58
	$p$ — номер наиболее высокого, но еще связанного уровня	74
	$P_{z,i}$ — сложная функция от $n_e$ и $T_e$	94
	$p_0$ — начальное давление	104
	$P(\nu)$ — мощность излучения	126
$Q, q$	$Q_{ij}$ — энергия кулоновского взаимодействия	12
	$Q_i$ — сумма по состояниям	20
	$q_e$ и $q_i$ — заряды электрона и иона	89
$R, r$	$r_e$ — равновесное расстояние между ядрами	10
	$r$ — вектор конфигурационного пространства	13
	$r$ — расстояние от атома до точки наблюдения	34
	$r_a$ — радиус-вектор электрона	48
	$R$ — межъядерное расстояние	53
	$\bar{r}(0)$ — среднее расстояние частиц от оси колонны	90
	$R_0$ — внешний радиус колонны	94
	$r^k$ — внутренний радиус колонны	95
	$R$ — скорость поглощения излучаемой энергии	101
	$r_0$ — «классический» радиус электрона	129
$S, s$	$S$ — коэффициент скорости столкновительно-излучательной ионизации	79
	$s$ — сила линии	127
	$S_{j'l'}$ — фактор Хэнля-Лондона	127
$T, t$	$T_g$ — температура газа	17
	$T_e$ — электронная температура	21
	$T_+$ — температура ионов	26
	$T_{eq}$ — равновесная температура	27
	$\bar{T}_e(0)$ — нормальная температура	126
	$T_r$ — эффективная радиационная температура	126
$U, u$	$u_{эф}$ — эффективная кинетическая энергия электрона	18
	$\Delta U_{Rx}$ — разность энергий в точке пересечения	53
	$U_p = \varepsilon^{(e)}/\varepsilon_p$	66
	$u_p = \varepsilon_p/kT_e$	67
	$U_{pq} = \varepsilon^{(e)}/(\varepsilon_q - \varepsilon_p)$	69
	$u_{pq} = (\varepsilon_q - \varepsilon_p)/kT_e$	69
	$\Delta u_{\max} = (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\max-1})/kT_e$	114
$V, v$	$\langle v^2 \rangle$ — средний квадрат скорости	7
	$v_t$ — скорость теплового движения частиц	7
	$V$ — потенциальная энергия (потенциал), потенциальная функция	8

$v$	— вектор скорости	13
$v_c$	— скорость движения центра масс	14
$V_{nn}$	— диагональный матричный элемент	43
$V_{mnl}$	— недиагональный матричный элемент	43
$\langle v_e \rangle$	— средняя скорость хаотического движения электронов	46
$v_d$	— скорость дрейфа электронов	46
$V_m(r)$	— энергия взаимодействия атомов в метастабильном и основном состояниях	56
$V_{зф}$	— эффективный потенциал	57
$v_i$	— скорость движения ионов	99
$W, w$	$W_p = (e^{(a)} - \epsilon_p) / \epsilon_p$ — приведенная поступательная энергия сталкивающихся частиц	72
	$w_p = \epsilon_p / kT_a$	72
	$W_{pq} = (e^{(a)} -  \epsilon_p - \epsilon_q ) /  \epsilon_p - \epsilon_q $	73
	$w_{pq} =  \epsilon_p - \epsilon_q  / kT_a$	73
	$W_{неупр}$ и $W_{упр}$ — скорости неупругого и упругого процессов переноса энергии	98
$X, x$	$x_e$ — коэффициент ангармоничности	11
$Y, y$	$YZ^\dagger$ — колебательно-возбужденная молекула	55
$Z, z$	$z$ — заряд ядра (иона)	9
	$z^{(0)}(v)$ — частота столкновений молекулы	25
	$z$ — полное число столкновений	25
	$z$ — число колонн в единице объема	91
	$z_n$ — число эквивалентных электронов во внешней оболочке атома	126
$A, \alpha$	$\alpha$ — параметр в уравнении $V = Ce^{-\alpha r_{ij}}$	10
	$\alpha_i$ — скорость диссоциативной рекомбинации	59
	$\alpha$ — постоянная тонкой структуры	68
	$\alpha_p$ и $\alpha_p n(1)$ — скорости излучательной рекомбинации на уровне «p»	77
	$\alpha$ — коэффициент скорости столкновительно-излучательной рекомбинации	79
	$\alpha_r$ — коэффициент скорости двойной столкновительно-излучательной рекомбинации	87
	$\alpha_L(t)$ и $\alpha_N(t)$ — коэффициенты скорости столкновительно-излучательной рекомбинации по линейному ( $L$ ) и нелинейному ( $N$ ) законам	91
	$\alpha_0$ — начальная степень ионизации	104
$B, \beta$	$\beta$ — экранирующий множитель	9
	$\beta(c, p)$ — коэффициент скорости излучательной рекомбинации	68
	$\beta(p, c)$ — коэффициент скорости фотоионизации	68
$\Gamma, \gamma$	$\Gamma, \Gamma_{упр}, \Gamma_{неупр}$ — ширины уровней квазистационарного состояния	46
	$\gamma$ — коэффициент распада	84
	$\Delta \Gamma_i$ — диффузионный член	93
	$\gamma$ — показатель адиабаты	124
$\Delta, \delta$	$\delta$ — смещение частиц	5
	$\delta_i$ — сдвиг фазы $l$ -й парциальной волны	35
	$\Delta_\alpha(\Phi_1)$ и $\Delta_s(\Phi_1)$ — доправочные члены, учитывающие $n(1)$ и $T(1)$	80
	$\Delta_p(0)$ и $\Delta_p(1)$ — комбинации $n(p)$ и $g(p)$	80
	$\delta_i$ — общая скорость рекомбинации на уровень «i»	108

<b>Е, е</b>	$\epsilon_0$ — диэлектрическая постоянная вакуума	4
	$\epsilon$ — глубина потенциальной ямы	11
	$\epsilon_i$ — энергия $i$ -го уровня	20
	$\epsilon_{\text{ион}}$ — энергия ионизации	21
	$\Delta\epsilon_{\text{ион}}$ — снижение энергии ионизации	21
	$\epsilon_0$ — энергия налетающего электрона	38
	$\epsilon_{\text{ион}}^*$ — потенциал ионизации возбужденного атома	47
	$\epsilon_{1\text{H}}$ — потенциал ионизации атома водорода	48
	$\Delta\epsilon$ — дефект энергии	50
	$\epsilon_{\text{ф}}$ и $\epsilon_e$ — кинетические энергии фотона и электрона	64
	$\epsilon$ — диэлектрическая проницаемость вещества	65
	$\epsilon_d$ — энергия деэвозбуждения	99
	$\epsilon_{pq}$ — энергия перехода	111
	$\epsilon_{\text{вр}}$ — вращательная энергия	127
<b>Н, η</b>	$\eta$ — коэффициент захвата	45
	$\eta(c) = n(c)/z^2$ — приведенное значение электронной плотности	85
<b>Θ, θ</b>	$\theta$ — ориентационный (полярный) угол рассеяния	11
	$\theta_c$ — угол рассеяния в системе центра масс	31
	$\theta = T/z^2$ — приведенная температура	85
<b>К, κ</b>	$\kappa$ — волновое число вылетевшего электрона	42
	$\kappa$ — коэффициент поглощения	68
<b>Λ, λ</b>	$\ln\Lambda = \ln \frac{l_D}{b_0}$ — кулоновский логарифм	26
	$\Lambda = b^2 + 4Dt$	90
	$\lambda_0$ — длина свободного пробега нейтральных атомов	94
	$\Delta\lambda$ — полуширина линии	126
<b>М, μ</b>	$\mu$ — приведенная масса молекулы, системы	11
	$\mu(r)$ — дипольный момент	11
	$\mu_p = 1 - \lambda_p$ — коэффициент реабсорбции	68
<b>Ν, ν</b>	$\nu_{0,n}$ — частота перехода	10
	$\nu_m$ — частота столкновений при рассеянии электрона на нейтральных частицах	17
	$\langle \nu_{aa} \rangle$ — средняя частота столкновений одинаковых частиц сорта «а»	26
	$\langle \nu_{ei} \rangle$ — средняя частота столкновений электронов с ионами	27
<b>Ξ, ξ</b>	$\xi$ — обобщенный параметр	18
	$\xi_{\text{Месс}}$ — параметр Мессе	51
	$\xi_{\text{эп}}$ — число эквивалентных электронов на $p$ -м уровне	66
	$\xi(\nu, T)$ — фактор Бибермана	122
<b>Р, ρ</b>	$\rho_\nu, \rho_\lambda$ — спектральная плотность излучения	68
	$\rho$ — плотность вещества	111
<b>Σ, σ</b>	$r = \sigma$ при $V(r) = 0$	10
	$\sigma_{\text{диф}}$ — дифференциальное сечение	16
	$\sigma$ — эффективное сечение	16
	$\sigma_m$ — площадь поперечного сечения молекулы	30
	$\sigma_{\text{ион}}$ — сечение ионизации	38
	$\sigma_{\text{возб}}$ — сечение возбуждения	42
	$\sigma_a$ — сечение захвата	46
	$\sigma_{\text{неупр}}$ — сечение колебательного возбуждения или диссоциации	46
	$\sigma_{\text{рек}}$ — сечение рекомбинации ионов	47
	$\sigma_r$ — сечение резонансной перезарядки	49
	$\sigma_{\text{макс}}$ — сечение поглощения резонансного излучения	61

$\sigma_n^{кл}(\nu)$  — классическое сечение фотоионизации водородоподобных систем

$\sigma_{ион}(\nu)$  — сечение фотоионизации

$\sigma_{j,0}$  — сечение транспортного переноса

$\sigma_e$  — сечение разрушения метастабильных атомов

$\sigma_k$  — сечение диффузии метастабильных атомов

$\sigma_T$  и  $\sigma_R$  — сечения томсоновского и рэлеевского рассеяний

**T, τ**  $\tau$  — время релаксации  
 $\tau_n$  — время поступательной релаксации  
 $\tau_0$  — среднее время свободного пробега  
 $\langle \tau_{aa} \rangle$  — нормированное время релаксации  
 $\langle \tau_{ei} \rangle$  — время равновесного распределения энергии между электронами и ионами  
 $\tau_{дис}$  — время равновесной диссоциации  
 $\tau_{ион}$  — время равновесной ионизации  
 $\tau_{возб}$  — время равновесного возбуждения  
 $\tau(\nu)$  — оптическая толщина плазмы  
 $\tau_{j,0}$  — время релаксации момента импульса  
 $\tau_{см}$  — время смещения колонны путем диффузии  
 $\tau_{z-1,1}$  — время релаксации частицы на основном уровне

**Ф, φ**  $\varphi_0$  — начальная фаза колебаний  
 $\varphi(x)$  — функция экранирования  
 $\varphi_i$  — ориентационный (азимутальный) угол  
 $\varphi$  — некоторая функция скорости  
 $\varphi_m$  и  $\varphi_n$  — ортогональные линейные комбинации волновых функций  $\psi_m$  и  $\psi_n$   
 $\varphi_1$  — переменная  
 $\Phi_1(\Delta U_{макс})$  и  $\Phi_2(\Delta U_{макс})$  — квантово-механические поправки Дравина при частичном ЛТР  
 $\varphi_{1,k}$  — функция возбуждения

**Ψ, ψ**  $\psi_0$  — падающая волна  
 $\psi_1$  — рассеянная волна  
 $\Psi_1(\beta, u)$  — квантово-механическая поправка Дравина для атомов при полном ЛТР  
 $\Psi_{m\alpha}(x)$  — квантово-механическая поправка Дравина для ионизации тяжелыми частицами  
 $\Psi_2(\beta, u)$  — квантово-механическая поправка Дравина для ионов при полном ЛТР

**Ω, ω**  $\omega_p$  — плазменная частота  
 $\omega_e$  — частота колебания  
 $\omega_\Omega$  — элемент телесного угла

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
<b>Глава 1. Плазма. Основные понятия</b>	<b>4</b>
§ 1. Макроскопические характеристики	4
§ 2. Микроскопические характеристики	5
<b>Глава 2. Взаимодействие частиц плазмы</b>	<b>7</b>
§ 1. Взаимодействие заряженных частиц в плазме	7
§ 2. Потенциальная энергия взаимодействия	8
<b>Глава 3. Распределение частиц в плазме по свободным и связанным состояниям</b>	<b>13</b>
§ 1. Кинетическое уравнение Больцмана	13
§ 2. Интеграл столкновений	14
§ 3. Функции распределения свободных электронов. Распределения Максвелла и Драйвстейна	17
§ 4. Больцмановское уравнение переноса. Законы сохранения	20
§ 5. Распределение Больцмана для связанных состояний	20
§ 6. Распределение частиц по степеням ионизации в равновесной (термической) плазме. Уравнение Саха	21
§ 7. Уравнение Фоккера—Планка	23
<b>Глава 4. Релаксационные процессы в плазме</b>	<b>24</b>
§ 1. Время релаксации. Простейшее релаксационное уравнение	24
§ 2. Поступательная релаксация	25
§ 3. Время установления равновесных диссоциации и ионизации	28
<b>Глава 5. Эффективные сечения столкновений</b>	<b>29</b>
§ 1. Упругие столкновения электронов с тяжелыми частицами	29
§ 2. Классическая теория рассеяния в поле центральных сил	31
§ 3. Квантово-механическая теория рассеяния	32
§ 4. Неупругие столкновения электронов с тяжелыми частицами	36
§ 5. Неупругие столкновения тяжелых частиц в плазме	47
§ 6. Столкновения возбужденных атомов и молекул	54
§ 7. Ионно-молекулярные реакции	56
<b>Глава 6. Фотовозбуждение и фотоионизация</b>	<b>61</b>
§ 1. Сечение фотовозбуждения и фотоионизации атомов	61
§ 2. Сечение электронно-ионной рекомбинации	63
§ 3. Фотопоглощение молекул	64
§ 4. Многоквантовые процессы	65
<b>Глава 7. Электронно-ионная рекомбинация</b>	<b>65</b>
§ 1. Основные столкновительно-излучательные процессы	66
§ 2. Столкновения тяжелых частиц с тяжелыми частицами вида $V^{(z-1)+}(1)$ , например с атомами водорода	71
§ 3. Процессы, определяющие заселение энергетических уровней в плазме	74
§ 4. Фундаментальное уравнение кинетики электронно-ионной рекомбинации в однородной квазистационарной плазме	76
§ 5. Эффективные коэффициенты скорости столкновительно-излучательной рекомбинации и ионизации	79
§ 6. Столкновительно-излучательная рекомбинация одно- и многозарядных ионов	83

§ 7. Роль диффузии в механизме рекомбинации в неоднородной плазме . . . . .	88
§ 8. Рекомбинация в нестационарной плазме . . . . .	97
§ 9. Кинетика ионизации молекулярного водорода в плазме импульсного разряда . . . . .	103
<b>Глава 8. Модели плазмы . . . . .</b>	<b>110</b>
§ 1. Модель локального термического равновесия (ЛТР) . . . . .	110
§ 2. Корональная модель плазмы . . . . .	116
§ 3. Столкновительно-излучательная модель . . . . .	118
<b>Глава 9. Определение температуры и плотности частиц в плазме из спектральных данных . . . . .</b>	<b>119</b>
§ 1. Методы диагностики ЛТР-плазмы . . . . .	119
§ 2. Диагностика плазмы, не находящейся в состоянии ЛТР . . . . .	125
§ 3. Определение колебательной и вращательной температур молекул . . . . .	126
§ 4. Определение поступательной температуры атомов (или молекул) . . . . .	127
§ 5. Определение плотности электронов . . . . .	128
<b>Литература . . . . .</b>	<b>130</b>
<b>Указатель условных обозначений . . . . .</b>	<b>135</b>